Strategien der Sammelbestellung bei der Lagerhaltung

INAUGURALDISSERTATION
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaft
(doctor rerum oeconomicarum)
der
Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen
Fakultät der Universität des Saarlandes

vorgelegt von:
Diplom-Kaufmann Alois Weber

Saarbrücken 1968

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41542722_0025

Strategien der Sammelbestellung bei der Lagerhaltung

INAUGURALDISSERTATION
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaft
(doctor rerum oeconomicarum)
der
Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen
Fakultät der Universität des Saarlandes

vorgelegt von:
Diplom-Kaufmann Alois Weber

Saarbrücken 1968

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dekan:	Professor Dr. G. Menges
Erstberichterstatter:	Professor Dr. H. Schneeweiß
Zweitberichterstatter:	Professor Dr. H. Hax
Tag der Disputation:	12. Juli 1968

G L I E D E R U N G

Seite

EINLEITUNG 1

Teil I: ALLGEMEINE STRUKTUR DER LAGERHALTUNGS-MODELLE. 4

1. Fragen zur Terminologie. 4
2. Die wichtigsten Komponenten der Lagerhaltungssysteme. 7
   - 2.1. Die Nachfrage. 7
   - 2.2. Die Wiederbeschaffung. 8
   - 2.3. Die Kosten. 8
   - 2.4. Die Restriktionen. 10

Teil II: DAS JOINT-ORDERING-PROBLEM FÜR DETERMINISTISCHE LAGERHALTUNGSSYSTEME BEI UNABHÄNGIGKEIT DER BESCHAFFUNGSKOSTEN VON DER ZAHL VERSCHIEDENER, ZU EINER BESTELLUNG ZUSAMMENGEFASSTER GÜTER. 11

1. Erläuterung des Joint-Ordering-Problems. 11
2. Das klassische Bestellmengenmodell. 11
3. Joint-Ordering-Politik, angewandt auf das klassische Bestellmengenmodell. 14
   - 3.1. Vorteile der Joint-Ordering-Politik, dargestellt an einem Zahlenbeispiel mit zwei Gütern. 15
   - 3.2. Die Joint-Ordering-Politik für n Güter. 24
   - 3.3. Zwei kleine Modifikationen der Joint-Ordering-Politik für n Güter. 27
   - 3.4. Exkurs: Die Kostenfunktion der Joint-Ordering-Politik in Abhängigkeit vom Bestellintervall t. 29
4. Joint-Ordering-Politik, angewandt auf das deterministische Fehlmengenmodell. 30
   - 4.1. Das deterministische Fehlmengenmodell für ein Gut. 30
   - 4.2. Die Joint-Ordering-Politik für zwei Güter beim deterministischen Fehlmengenmodell. 34
   - 4.3. Vergleich der Joint-Ordering-Politik und der separaten Bestellpolitik für das deterministische Fehlmengenmodell mit zwei Gütern. 38

Seite

5.Joint-Ordering-Politik, angewandt auf ein Modell mit Mengenrabatten. 39

5.1. Darstellung eines einfachen Rabattmodells. 39

5.2. Die Joint-Ordering-Politik für zwei Güter beim Rabattmodell. 43

5.3. Untersuchung der Vorteilhaftigkeit der Joint-Ordering-Politik im Rabattmodell. 47

6.Joint-Ordering-Politik, angewandt auf ein Modell mit einer Lagerkapazitätsrestriktion. 49

6.1. Darstellung eines Lagerhaltungsmodells mit einer Kapazitätsrestriktion. 49

6.2. Die Joint-Ordering-Politik für ein Lagerhaltungsmodell mit Kapazitätsrestriktion. 51

Teil III: DAS JOINT-ORDERING-PROBLEM FÜR DETERMINISTISCHE LAGERHALTUNGSSYSTEME BEI ABHÄNGIGKEIT DER BESCHAFFUNGSKOSTEN VON DER ZAHL VERSCHIEDENER ZU EINER BESTELLUNG ZUSAMMENGEFASSTER GÜTER. 54

1.Joint-Ordering-Politik, angewandt auf das klassische Bestellmengenmodell, bei Abhängigkeit der Beschaffungskosten von der Zahl verschiedener zu einer Bestellung zusammengefaßter Güter. 54

1.1. Ableitung der Kostenfunktion für die separate Bestellpolitik und die Joint-Ordering-Politik. 54

1.2. Spezialfall 1. 57

1.3. Spezialfall 2. 58

1.4. Bedingungen für eine disaggregierte Joint-Ordering-Politik. 62

1.4.1. Bedingungen für das Ausklammern eines Gutes aus der Joint-Ordering-Politik. 62

Seite

1.4.2. Bedingungen für die Bildung zweier Gütergruppen unter Anwendung der Joint-Ordering-Politik. 67

1.4.3. Bedingungen für die Bestellung eines Gutes nur in ganzen Vielfachen des gemeinsamen Bestellintervalls. 70

1.5. Spezialfall 3. 73

2. Joint-Ordering-Politik, angewandt auf ein zentrales Warenlager mit mehreren Nebenlägern. 75

Teil IV: DAS JOINT-ORDERING-PROBLEM, ANGEWANDT AUF EINIGE STOCHASTISCHE LAGERHALTUNGS-MODELLE. 82

1. Einige Bemerkungen zu den stochastischen Lagerhaltungssystemen. 82

2. Joint-Ordering-Politik, angewandt auf ein stochastisches Lagerhaltungssystem mit gleichem und konstantem Variationskoeffizienten der Nachfrage für alle Güter. 83

3. Joint-Ordering-Politik, angewandt auf ein stochastisches Fehlmengenmodell. 88

3.1. Das stochastische Fehlmengenmodell für ein Gut. 88

3.2. Die Joint-Ordering-Politik in einem stochastischen Fehlmengenmodell für n Güter. 93

4. Vergleich der Joint-Ordering-Politik und der separaten Bestellpolitik in einem weiteren, einfachen stochastischen Lagerhaltungsmodell. 95

5. Joint-Ordering-Politik, angewandt auf ein stochastisches Lagerhaltungsmodell mit Poissonverteilung der Nachfrage. 97

SCHLUSSBEMERKUNGEN 103

LITERATURVERZEICHNIS 105

EINLEITUNG

Die erste bekannt gewordene Analyse eines Lagerhaltungssystems stammt von F.W.Harris. Sie wurde 1915 veröffentlicht und hatte die jetzt bereits klassische Losgrößenformel zum Inhalt.[1] Diese Losgrößenformel ist bis heute öfter angewandt worden als jedes andere Einzelresultat der Lagerhaltungstheorie.

Die weiteren Veröffentlichungen bis zum zweiten Weltkrieg brachten keine wesentlichen Neuerungen.[2] Nach dem zweiten Weltkrieg setzte im Rahmen der Unternehmensforschung (Operations Research), insbesondere in den USA, eine lebhafte Entwicklung auf dem Gebiet der Lagerhaltungstheorie ein, und einige Autoren behaupten sogar, daß kein anderes Gebiet des Operations Research ein solch starkes Interesse gefunden hat.[3] Einen ausgezeichneten Überblick der Forschungsergebnisse bis zum Jahre 1951 gibt Whitin.[4]

Mit der Veröffentlichung der Arbeiten von Arrow, Harris, Marschak[5] und Dvoretzky, Kiefer, Wolfowitz[6] beginnt die

---

1) Vgl. W.F.Harris, Operations and Cost, New York 1915, zitiert nach: H.J.Schrader, die Theorie der Vorratsplanung unter besonderer Berücksichtigung unsicherer Erwartungen. Diss. Bonn 1963, S.7. Weiterhin: C.W. Churchman, R.L.Ackoff und E.L.Arnoff, Operations Research - Eine Einführung in die Unternehmensforschung. Deutsche Übersetzung von E.Schlecht und F.Ferschl, Wien und München 1961, S.158; E.Naddor, Inventory Systems, New York, London,Sidney 1966, S.16.

2) Vgl. F.E.Raymond, Quantity and Economy in Manufacturing, New York 1931; K.Andler, Rationalisierung der Fabrikation und optimale Losgröße, München 1929.

3) Vgl. C.W.Churchman, R.L.Ackoff und E.L.Arnoff, Introduction to Operations Research, New York 1957, S.195.

4) Vgl. T.M.Whitin, The Theory of Inventory Management, Princeton,N.J.,1953, 2.Auflage 1957. Dieses Buch enthält auch die erste große Bibliographie auf dem Gebiet der Lagerhaltungstheorie.

5) K.J.Arrow, T.Harris und J.Marschak, Optimal Inventory Policy. In: Econometrica,Bd.19,1951, S.250-272.

6) A.Dvoretzky, J.Kiefer und J.Wolfowitz, The Inventory Problem. in: Econometrica, Bd.20, 1952, S.187-222 und S.450-466. Weiter dieselben in: On the Optimal Character of the (s,S) Policy in Inventory Theory. In: Econometrica, Bd.21, 1953, S.586-596.

eigentliche "moderne" ANalyse von Lagerhaltungssystemen, die gekennzeichnet ist durch die Anwendung schwieriger mathematischer und statistischer Instrumente und die sehr allgemeine Natur der untersuchten Systeme. Im Rahmen dieser Arbeit kann auf die einzelnen Entwicklungen jedoch nicht eingegangen werden.[7)]

---

7) Nachfolgend einige der wichtigen Veröffentlichungen: K.J.Arrow, S.Karlin und H.Scarf, Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford 1958; A.Battersby, A Guide to Stock Control, London 1962; E.H. Bowman und R.B.Fetter, Analysis for Production Management, Homewood, Ill., 1957; R.G.Brown, Statistical Forecasting for Inventory Control, New York 1959; J.Buchan und E.Koenigsberg, Scientific Inventory Management, Englewood Cliffs, N.J., 1963; Churchman-Ackoff-Arnoff, a.a.O...; R.B.Fetter und W.C.Dalleck, Decision Models for Inventory Management, Homewood, Ill., 1961; G.Hadley und T.M.Whitin, Analysis of Inventory Systems, Englewood Cliffs, N.J., 1963; F.Hanssmann, Operations Research in Production and Inventory Control, New York 1962; F.Hanssmann, A Survey of Inventory Theory from the Operations Research Viewpoint, Kapitel 3, in: Progress in Operations Research, Vol.1, hrsg. von R.L.Ackoff, New York 1961; C.C.Holt, F.Modigliani, J.F.Muth und H.A.Simon, Planning Production, Inventories and Work Force, Englewood Cliffs, N.J., 1960; J.F.Magee, Production and Inventory Control, New York 1958; P.M.Morse, Queues, Inventories, and Maintenance, New York 1958; E.Naddor, Inventory Systems,New York 1966; M.Starr und D.W.Miller, Inventory Control: Theory and Practice, Englewood Cliffs, N.J., 1962; H. M.Wagner, Statistical Management of Inventory Systems, New York 1962. -
Aus dem deutschen Bereich: H.Schlüter, Untersuchungen zum Problem der optimalen Losgröße, Diss.Frankfurt 1958; H.Müller-Merbach, Die Bestimmung optimaler Losgrößen bei Mehrproduktfertigung, Diss.Darmstadt 1962; H.J.Schrader, Die Theorie der Vorratsplanung. Unter besonderer Berücksichtigung unsicherer Erwartungen, Diss. Bonn 1963; W.Marx, Absatzmengen- und Losgrößenbestimmungen im Sortenbetrieb, Meisenheim am Glan 1966; W.Strobel, Simultane Losgrößenbestimmung bei stationären Modellen, in: ZfB 1964, S.241 ff.; L.Pack, Optimale Bestellmenge und optimale Losgröße, in: ZfB 1963, S. 465-492 und S. 573-594; W.Dinkelbach, Zum Problem der Losgröße und des Sortenwechsels bei der Produktionsplanung, Diss.Köln 1963; D.Winkler, Die kurzfristige Abstimmung zwischen Produktion und Lagerung unter besonderer Berücksichtigung des Lagerbereichs, Diss. Saarbrücken 1964.

Gegenwärtig werden Forschungen zur Lagerhaltungstheorie auf verschiedenen Ebenen durchgeführt. Diese lassen sich zwischen zwei extreme Positionen einordnen: der Beschäftigung mit rein praktischen Problemen einerseits und der Untersuchung abstrakt mathematischer Eigenschaften von Lagerhaltungsmodellen, ohne Berücksichtigung möglicher praktischer Anwendung, andererseits. Die folgenden Untersuchungen sollen sich auf einer mittleren Ebene zwischen diesen beiden Extremen bewegen.

Der Gegenstand meiner Untersuchungen soll die Theorie der optimalen Sammelbestellung oder die sog. "Joint-Ordering-Policy" sein, dargestellt an einigen wichtigen Modellen der allgemeinen Lagerhaltungstheorie. Das klassische Modell zur Bestimmung der optimalen Bestellmenge hatte schon vor dem 2.Weltkrieg und erst recht danach eine ganze Anzahl von Weiterentwicklungen erfahren. Aber allen Modellen lag entweder nur der Fall eines einzigen Gutes zugrunde, oder wenn mehrere Güter betrachtet wurden, wie z.B. in den Modellen mit Kapazitätsrestriktionen, sah man einzig und allein das Konkurrieren der einzelnen Güter um die knappen Kapazitäten. Der naheliegenden Idee, daß man mehrere Güter zu einer Sammelbestellung zusammenfassen könnte, für die dann ein optimaler Bestellrhythmus zu errechnen wäre, wurde erst in jüngster Zeit etwas Aufmerksamkeit geschenkt. Ziel der folgenden Arbeit ist es daher, die bisherigen Beiträge zur Theorie der optimalen Sammelbestellung oder "Joint-Ordering-Policy" auf Gemeinsamkeiten und Weiterentwicklungen hin zu untersuchen und diese um einige eigene Ergebnisse zu bereichern.

Teil I: ALLGEMEINE STRUKTUR DER LAGERHALTUNGSMODELLE.

1. Fragen zur Terminologie.

Zur Lagerhaltungstheorie gibt es bislang keine allgemeinverbindliche Terminologie. Das zeigt schon die Vielzahl unterschiedlicher Benennungen des Gegenstandes in der angelsächsischen Literatur wie z.B. "inventory problem", "inventory control", "inventory process", "inventory theory", "inventory management", "inventory systems" u.a. Zu diesem Mangel an einer einheitlichen Terminologie kommt noch die Unklarheit über die Bereiche, die die Lagerhaltungstheorie umfassen soll, hinzu.

Die folgenden Erläuterungen sollen eventuellen terminologischen Mißverständnissen vorbeugen.[8)]

Eine Lagerhaltung findet nur statt, um künftiger Nachfrage begegnen zu können. Auch wenn es keine Lieferzeiten gäbe und wenn die Produktion eines Gutes momentan erfolgen würden, kann es sinnvoll sein, ein Gut zu lagern, weil man Bestellkosten, Rüstkosten u.dgl. sparen will. Auf die zahlreichen Motive, die eine Lagerhaltung veranlassen, kann hier nicht eingegangen werden. Es erfolgt nur eine Definition in bezug auf die Kosten.

Ein System soll als Lagerhaltungssystem bezeichnet werden, wenn in ihm nur die folgenden drei Kostenarten eine Rolle spielen, wobei je zwei oder alle drei Gegenstand der Kontrolle sind:[9)]

1. die Lagerhaltungskosten K_L (d.h. die Kosten der Unterhaltung eines Lagers, wie z.B. Zinskosten für das gebundene Kapital, Manipulationskosten für die gelagerten Waren, Kosten durch Verderb, Schwund u.a.)

---

8) Zum folgenden vgl. E.Naddor, Inventory Systems,a.a.O., S.3-44.

9) Vgl. auch H.-J.Schrader, Die Theorie der Vorratsplanung,...a.a.O., S.20-23.

2. die Fehlmengenkosten K_F (wie z.B. die Kosten entgangener Verkäufe, Good-Will-Verluste, Konventionalstrafen u.a.)

3. die Beschaffungskosten K_B (wie z.B. Bestellkosten, Transportkosten, u.a.)

Die Summe dieser Kosten bezeichnet man als die gesamten Lagerkosten.

Der Begriff "Kosten" ist jedoch hier in einem allgemeineren Sinne aufzufassen, nämlich einfach als Erfolgsmaßstab für das jeweils untersuchte System (relevante Kosten). Dabei muß vorausgesetzt werden, - um überhaupt erst sinnvolle Vergleiche zu ermöglichen - daß die oben erwähnten drei Kostenarten sich alle durch irgendein gemeinsames, einheitliches Maß messen lassen.

Die oben genannten drei Kostenarten sind eng miteinander verknüpft. Sinkt z.B. die eine Kostenart, so werden eine der anderen oder sogar die beiden anderen Kostenarten steigen.

Nachdem oben das Lagerhaltungssystem definiert wurde, sollen jetzt die verschiedenen Typen dieses Systems charakterisiert werden. Insgesamt kann man vier Typen unterscheiden. Je nachdem, welche Kostenarten Gegenstand der Kontrolle sind, unterscheidet man:

1. Typ (K_L, K_F, K_B)

Bei diesem Typ sind alle Kostenarten Gegenstand der Kontrolle.

2. Typ (K_L, K_F)

Bei diesem Typ spielen nur Lagerhaltungs- und Fehlmengenkosten, jedoch nicht die Beschaffungskosten eine Rolle.

3. Typ (K_L, K_B)

Bei diesem Typ spielen nur Lagerhaltungs- und Beschaffungskosten, nicht jedoch die Fehlmengenkosten eine Rolle.

4. Typ (K_F,K_B)

Bei diesem Typ spielen nur Fehlmengen- und Beschaffungskosten, nicht jedoch die Lagerhaltungskosten eine Rolle.

Mit diesem Schema sind alle Lagerhaltungstypen beschrieben. Das Lagerhaltungsproblem besteht nun darin, optimale Entscheidungen im Hinblick auf ein Lagerhaltungssystem zu treffen. Bei diesem Entscheidungsproblem sind normalerweise der Bestellzeitpunkt und die Bestellmenge die eigentlichen Variablen, die sog. Kontrollvariablen. Sie beeinflussen die Lagerkosten.

Von der Lösung eines Lagerhaltungssystems sprechen wir, wenn für die Kontrollvariablen spezifische Werte gefunden werden, die die gesamten Lagerkosten zu einem Minimum führen. Auch wenn in bestimmten Fällen das untersuchte Problem keine spezifischen Werte für die Kontrollvariablen, sondern nur eine Anzahl gleichwertiger optimaler Entscheidungsregeln ergibt, soll von einer Lösung des Systems gesprochen werden.

Mit Hilfe der beiden Kontrollvariablen Bestellzeitpunkt und Bestellmenge lassen sich verschiedene Lagerhaltungsstrategien beschreiben. Dabei hängt der Bestellzeitpunkt normalerweise entweder von einem bestimmten optimalen Bestellintervall t_o oder von der Unterschreitung eines bestimmten optimalen Meldebestandes s_o ab. Die Bestellmenge wird gewöhnlich entweder als sogenannte optimale Bestellmenge q_o vorgegeben oder als die Menge bestimmt, die nötig ist, das Lager auf ein bestimmtes optimales Lagerhaltungsniveau S_o wiederaufzufüllen. Die vier Größen t, s, q und S erlauben eine kurze und präzise Darstellung verschiedener Lagerhaltungsstrategien. So kann man z.B. (s,q)-, (t,S)-, (s,S)- und (t,q)-Lagerhaltungsstrategien definieren. Gewisse Modifikationen ergeben sich durch die explizite Einführung der Lieferfrist, sollen hier aber nicht weiter beachtet werden.

Nach diesen terminologischen Ausführungen kann noch nicht sogleich mit der Analyse bestimmter Lagerhaltungssysteme begonnen werden. In einem zweiten Kapitel müssen zunächst die wichtigsten Komponenten und Eigenschaften von Lagerhaltungssystemen skizziert werden.

2. Die wichtigsten Komponenten der Lagerhaltungssysteme.[10)]

Die Nachfrage, die Wiederbeschaffung, die Kosten und die Restriktionen sind die wichtigsten Komponenten in jedem Lagerhaltungssystem. Die Eigenschaften dieser Komponenten sollen hier etwas näher untersucht werden.

2.1. Die Nachfrage.

Im Zusammenhang mit der Nachfrage in Lagerhaltungssystemen taucht zunächst der Begriff der Nachfragemenge auf. Die Nachfragemenge ist in jeder Periode entweder konstant oder variabel. Weiterhin kann sie bekannt oder unbekannt sein. Bei Lagerhaltungssystemen mit bekannter Nachfragemenge spricht man von deterministischen Systemen. Von probabilistischen oder stochastischen Systemen spricht man, wenn die Nachfragemengen zwar nicht bekannt sind, ihnen aber Wahrscheinlichkeitsverteilungen zugeordnet werden können.

Die Nachfragerate ist eine weitere wichtige Größe. Sie ist definiert als Nachfragemenge pro Zeiteinheit in deterministischen, und als durchschnittliche Nachfragemenge während einer bestimmten Periode in stochastischen Systemen.

Letztlich spielt auch die Nachfragestruktur eine wesentliche Rolle. Die Nachfragestruktur erklärt die Art der Lagerabgänge. Diese können z.B. zu Beginn einer Periode, am Ende einer Periode oder gleichförmig über die ganze Periode verteilt, erfolgen. Dies sind nur einige Beispie-

---

10) Vgl. hierzu G.Hadley und T.M.Whitin, Analysis of Inventory Systems,...a.a.O., Kap.1, S.1-26; M.K.Starr und D.W.Miller, Inventory Control,... a.a.O., S.3-18; E.Naddor, Inventory Systems, ... a.a.O., S.21-44; H.-J.Schrader, Die Theorie der Vorratsplanung, ... a.a.O. S.17-23.

le aus der Anzahl möglicher Nachfragestrukturen. In den meisten Untersuchungen wird mit einer gleichförmigen Nachfragestruktur gearbeitet.

2.2. Die Wiederbeschaffung.

Drei Größen spielen bei der Wiederbeschaffung eine Rolle; erstens das Bestellintervall, zweitens die Bestellmenge und drittens die Lieferzeit.

Unter Bestellintervall versteht man die Zeitperiode zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bestellungen. Das Bestellintervall ist entweder vorgeschrieben oder nicht vorgeschrieben. In Lagerhaltungssystemen mit vorgeschriebenem Bestellintervall ist dieses natürlich keine Kontrollvariable mehr, sondern ein gegebener Parameter. Einzige Kontrollvariable in diesen Systemen ist nur noch die Bestellmenge. Häufigster Spezialfall ist die Annahme gleichlanger Bestellintervalle.

Die Lieferzeit ist die Spanne zwischen der Entscheidung zur Auffüllung und der tatsächlichen Auffüllung des Lagers. Sie ist im allgemeinen vorgeschrieben und nicht Gegenstand der Kontrolle. Obwohl es in der Praxis immer eine Lieferzeit gibt, kann ihre explizite Berücksichtigung in deterministischen Systemen unterbleiben.[11] Dies gilt nicht für stochastische Systeme. Hier hat die Lieferzeit im allgemeinen einen beträchtlichen Einfluß auf die Lösung der Systeme.

Es bleibt noch die Bestellmenge zu erwähnen. Zusammen mit dem Bestellintervall ist sie die Variable, die die Kosten beeinflußt. Auch hier ist die Annahme einer konstanten Bestellmenge für jedes Bestellintervall ein häufig untersuchter Spezialfall.

2.3. Die Kosten.

In Lagerhaltungssystemen spielen, wie schon erwähnt, die

---

11) Vgl. E.Naddor, Inventory Systems, ...a.a.O., S.31.

Lagerhaltungs-, die Fehlmengen- und die Beschaffungskosten eine Rolle. Damit diese Kosten als Erfolgsmaßstab der Kontrollvariablen eines Lagerhaltungssystems benutzt werden können, müssen sie alle auf dieselbe Zeitperiode bezogen werden, z.B. DM pro Jahr. Dies gilt unabhängig vom jeweils untersuchten Lagerhaltungssystem. Die Lagerhaltungs-, Fehlmengen- und Beschaffungskosten pro Einheit sind hiermit nicht zu verwechseln. Die Dimensionen dieser Kosten sind natürlich von System zu System verschieden.

In vielen Systemen sind die Kosten pro Einheit konstant mit folgenden Dimensionen:

$$k_l = \frac{\text{Lagerhaltungskosten (DM)}}{\text{Mengeneinheit x Zeiteinheit}} \qquad (1)$$

$$k_f = \frac{\text{Fehlmengenkosten (DM)}}{\text{Mengeneinheit x Zeiteinheit}} \qquad (2)$$

$$k_b = \frac{\text{Beschaffungskosten (DM)}}{\text{Bestellung}^+} \qquad (3)$$

($^+$ Der Nenner ist hier dimensionslos)

In bestimmten Systemen können aber auch andere Definitionen der Kosten pro Einheit sinnvoll sein. In der oben erwähnten Definition der Fehlmengenkosten pro Einheit hängen diese sowohl von der Anzahl fehlender Einheiten als auch von der Zeitdauer, in der Fehlmengen existieren, ab. Dies ist gewöhnlich der Fall, wenn die Fehlmengen noch nachgeliefert werden. Muß die unbefriedigt gebliebene Nachfrage als endgültig verloren angesehen werden, ist es sinnvoller, die Fehlmengenkosten als entgangenen Gewinn pro Einheit zu definieren, also unabhängig von der Zeit:

$$k_f = \frac{\text{Entgangener Gewinn (DM)}}{\text{Mengeneinheit}} \qquad (2^+)$$

Andere Definitionen der Beschaffungskosten werden hier nicht erläutert, da sie zum engeren Themenkreis dieser Arbeit gehören und später näher untersucht werden.

2.4. Die Restriktionen.

Bei der praktischen Untersuchung von Lagerhaltungssystemen müssen zahlreiche Restriktionen beachtet werden, von denen die der Lagerkapazität und der finanziellen Reserve meist am wichtigsten sind.

Nachdem in diesem Teil I die allgemeine Struktur der Lagerhaltungsmodelle erläutert wurde, komme ich im folgenden zum Kern der Arbeit.

Teil II: DAS JOINT-ORDERING-PROBLEM FÜR DETERMINISTISCHE LAGERHALTUNGSSYSTEME BEI UNABHÄNGIGKEIT DER BESCHAFFUNGSKOSTEN VON DER ZAHL VERSCHIEDENER, ZU EINER BESTELLUNG ZUSAMMENGEFASSTER GÜTER.

1. Erläuterung des Joint-Ordering-Problems.

Zahlreichen Untersuchungen von Lagerhaltungsproblemen liegt - unausgesprochen - die Annahme zugrunde, daß die verschiedenen Güter, aus denen sich ein Lager zusammensetzt, separat bestellt werden. Dies gilt auch für die Anwendung der Formel zur Bestimmung der optimalen Bestellmenge. Sie ist nur für den Einproduktfall entwickelt worden.

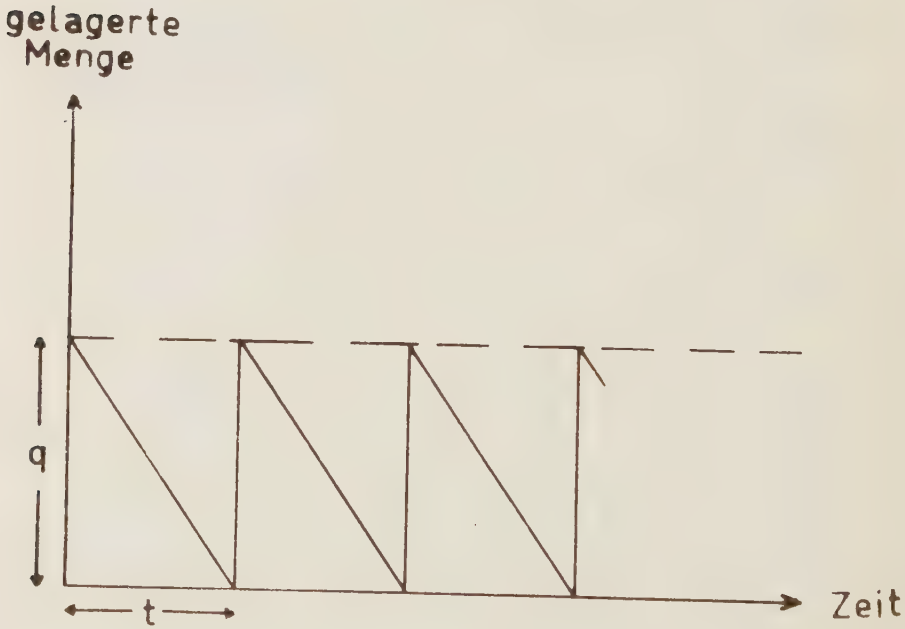
In der Praxis besteht nun aber oft die Möglichkeit, bei einem Lieferanten mehrere Güter zu bestellen. Ist dieser Fall gegeben, so liegt es nahe, die verschiedenen Güter nicht unabhängig voneinander zu bestellen, sondern vielmehr in Gruppen zusammengefaßt. Durch diese "Sammelbestellung" können u.U. die Beschaffungskosten reduziert werden. Die mit der Zusammenfassung mehrerer Güter zu einer Sammelbestellung verbundenen Probleme und die sich daraus ergebende Bestimmung eines optimalen gemeinsamen Bestellrhythmus kennzeichnen das "Joint-Ordering-Problem". Obwohl dieses Problem von großer praktischer Relevanz ist, hat es bis jetzt in der Literatur fast keine Beachtung gefunden. Auf die wenigen mathematischen Abhandlungen wird im Verlauf der Arbeit an entsprechender Stelle hingewiesen.

2. Das klassische Bestellmengenmodell.

In meiner Arbeit will ich die Vorteile der Joint-Ordering-Politik für einige Spezialfälle darstellen. Es werden jeweils die gesamten Lagerkosten dieser Bestellpolitik den Lagerkosten gegenübergestellt, die bei separater Bestellung der verschiedenen Güter entstehen. Aus diesem Grunde wird stets zuerst das Modell der separaten Bestellpolitik abgeleitet. Dieses wird dann mit dem analog dazu entwickelten Modell der Joint-Ordering-Politik verglichen.

Die Vorteile der Joint-Ordering-Politik sollen zunächst für den einfachsten Fall entwickelt werden. Es wird das klassische Modell der Bestimmung der optimalen Bestellmenge zugrundegelegt, das im folgenden kurz dargestellt wird.

Figur 1 illustriert die Lagerbewegung.



Figur 1

In diesem Lagerhaltungssystem gelten die folgenden Annahmen:[12)]

1. Die Nachfrage erfolgt deterministisch mit einer konstanten Rate von r Mengeneinheiten pro Zeiteinheit.
2. Es sollen keine Fehlmengen auftreten. D.h. immer, wenn das Lager leer ist, wird es sogleich aufgefüllt. Eine Lieferfrist tritt somit nicht auf. Die Wiederauffüllrate ist unendlich groß.

12) Vgl. E.Naddor, Inventory Systems,...a.a.O., S.48.

3. Die Bestellmenge q ist konstant.
4. Die Lagerhaltungskosten k_l sind konstant pro Mengeneinheit und Zeiteinheit.
5. Die Beschaffungskosten k_b sind konstant pro Bestellung.

Aus diesen Annahmen lassen sich unmittelbar folgende Beziehungen herleiten:

Der Quotient aus Bestellmenge q und Nachfrage r ergibt das Bestellintervall t.

$$t = \frac{q}{r} \tag{4}$$

Setzt man den Gesamtplanungszeitraum gleich eins, so ist das Bestellintervall t gewöhnlich kleiner oder höchstens gleich eins. Für die Bestellhäufigkeit folgt demnach:[13]

$$\text{Bestellhäufigkeit} = \frac{1}{t} = \frac{r}{q} \tag{5}$$

Der durchschnittliche Lagerbestand beträgt:

$$\text{durchschnittlicher Lagerbestand} = \frac{q}{2} \tag{6}$$

Aus den Annahmen 4 und 5 und den Relationen (4) - (6) erhält man die Gesamtkostenfunktion pro Zeiteinheit.

$$K = \frac{k_l q}{2} + \frac{k_b r}{q} \tag{7}$$

In (7) wird eine Kostendiskontierung nicht berücksichtigt. Da die Planperiode, die den hier zu betrachtenden Lagerhaltungsmodellen zugrunde liegt, generell nicht sehr lang ist, verursacht das Außerachtlassen der Diskontierung keine allzu großen Fehler. Eine Berücksichtigung der Diskontierung würde andererseits die folgenden Ableitungen erheblich komplizierter machen.

Man sieht nun anhand von (7), daß die Lagerhaltungskosten proportional mit zunehmender Bestellmenge steigen, während die Beschaffungskosten mit wachsendem q hyperbolisch abnehmen. Das Optimum findet man, indem K nach q differenziert

---

13) Probleme der Ganzzahligkeit sollen hier außer acht gelassen werden.

$$\frac{dK}{dq} = \frac{k_1}{2} - \frac{k_b r}{q^2} \qquad (8)$$

und die Ableitung gleich Null gesetzt wird. Nach Auflösen ergibt sich für die optimale Bestellmenge

$$q_o = \sqrt{2r \frac{k_b}{k_1}} \qquad (9)$$

Da

$$\frac{d^2K}{dq^2} = \frac{2k_b r}{q^3} > 0 , \qquad (10)$$

weil alle Größen nur positive Werte annehmen können, ist die Gleichung (9) sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung für das Kostenminimum.

Durch Einsetzen von q_o in (4) erhält man das optimale Bestellintervall t_o.

$$t_o = \sqrt{\frac{2}{r} \frac{k_b}{k_1}} \qquad (11)$$

Setzt man q_o in die Kostenfunktion (7) ein, so gelangt man nach einigem Umformen zu folgender Beziehung für die minimalen Kosten des Systems:

$$K_o = \sqrt{2rk_b k_1} \qquad (12)$$

3. Joint-Ordering-Politik, angewandt auf das klassische Bestellmengenmodell.

In einem Lager mit mehreren Gütern kann man nach den oben abgeleiteten Beziehungen für jedes Gut separat die optimale Bestellmenge und damit auch den optimalen Bestellrhythmus bestimmen. Die Gesamtlagerkosten aller Güter sind demnach die Summe der Lagerkosten der einzelnen Güter. Nach dieser Bestellpolitik wird jedes Gut separat gemäß seinem optimalen Bestellrhythmus bestellt und bei jeder Bestellung treten Beschaffungskosten auf.

Es soll nun gezeigt werden, daß immer, wenn mehrere Güter gleichzeitig bestellt werden können, z.B. von einem Lieferanten, und die Beschaffungskosten nur einmal anfallen, die obige Bestellpolitik nicht optimal ist. In diesem Fall ist die Gesamtheit der Güter als ein einziges Lagerhaltungssystem zu betrachten, das zu untersuchen ist.

3.1. Vorteile der Joint-Ordering-Politik, dargestellt an einem Zahlenbeispiel mit zwei Gütern.

Ein Lager bestehe aus zwei Gütern, Gut 1 und Gut 2, mit den bekannten Nachfrageraten r_1 und r_2 und den Lagerhaltungskosten k_{11} und k_{12} pro Mengen- und Zeiteinheit. Die Beschaffungskosten seien für beide Güter die gleichen: $k_{b1} = k_{b2} = k_b$.
Bisher wurde jedes Gut von einem anderen Lieferanten bezogen. Es bestehe nun die Möglichkeit, beide Güter von einem Lieferanten zu beziehen. Wie groß sind die Vorteile, wenn beide Güter gemeinsam bei dem neuen Lieferanten, nach einem noch zu bestimmenden, gemeinsamen optimalen Bestellrhythmus bestellt werden, unter der Annahme, daß die Beschaffungskosten der Sammelbestellung die gleichen sind wie bei der separaten Bestellung eines jeden Gutes allein? D.h. k_b sind die Beschaffungskosten der Joint-Ordering-Politik.

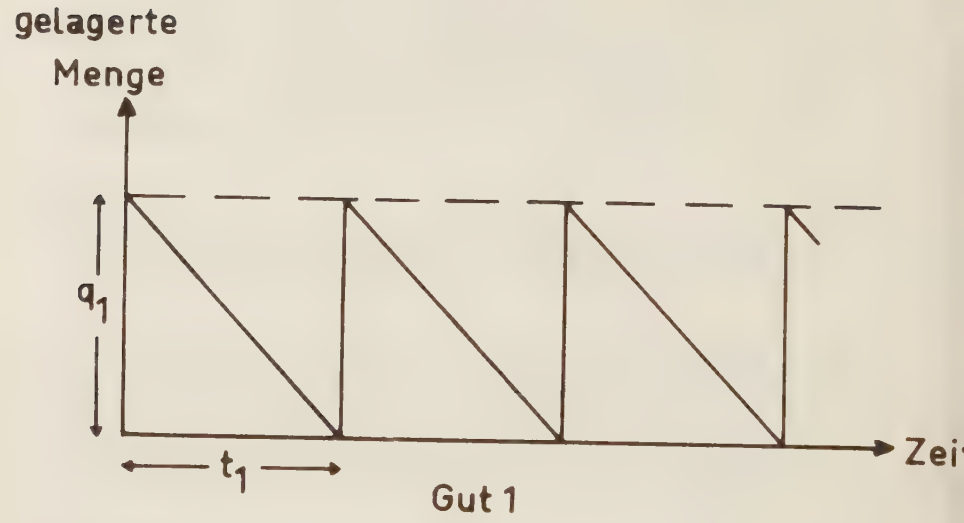
Figur 2 illustriert die Situation vor der Joint-Ordering-Politik.
In der Ausgangssituation galten für Gut 1 bzw. Gut 2 die folgenden Lagerkostenfunktionen:

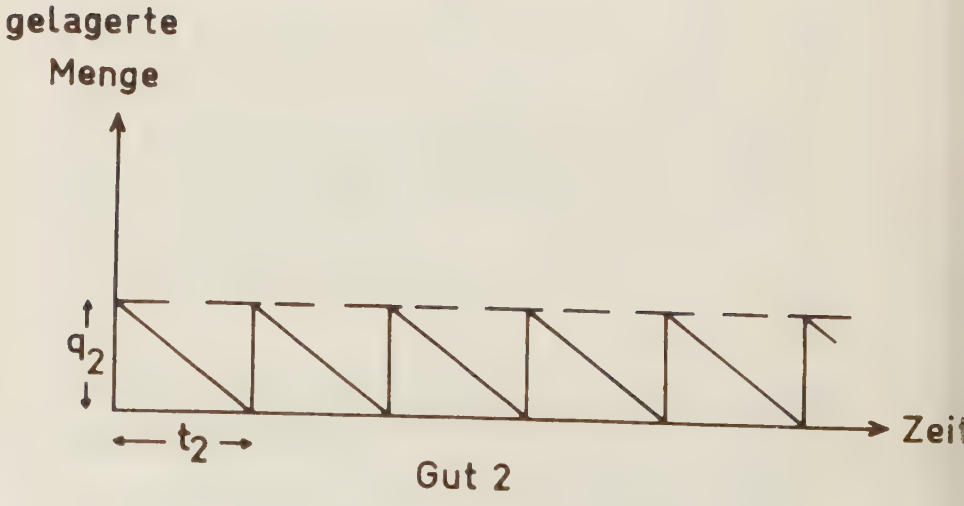
$$K_1 = \frac{k_{11}q}{2} + \frac{k_b r_1}{q} \qquad (13a)$$

bzw.

$$K_2 = \frac{k_{12}q}{2} + \frac{k_b r_2}{q} \qquad (13b)$$

die, jede für sich, zu optimieren waren. Die Optimierung führte zu folgenden Ergebnissen:





Figur 2

Optimale Bestellmenge für Gut 1 bzw. Gut 2.

$$q_{o1} = \sqrt{2r_1 \frac{k_b}{k_{11}}} \qquad (14a)$$

bzw.

$$q_{o2} = \sqrt{2r_2 \frac{k_b}{k_{12}}} \qquad (14b)$$

Optimales Bestellintervall für Gut 1 bzw. Gut 2.

$$t_{o1} = \sqrt{\frac{2}{r_1} \frac{k_b}{k_{11}}} \qquad (15a)$$

bzw.

$$t_{o2} = \sqrt{\frac{2}{r_2} \frac{k_b}{k_{12}}} \qquad (15b)$$

Minimale Gesamtlagerkosten für Gut 1 bzw. Gut 2.

$$K_{o1} = \sqrt{2r_1 k_b k_{11}} \qquad (16a)$$

bzw.

$$K_{o2} = \sqrt{2r_2 k_b k_{12}} \qquad (16b)$$

Die minimalen Gesamtlagerkosten für beide Güter waren demnach:

$$K_{o,1+2} = K_{o1} + K_{o2} = \sqrt{2r_1 k_{11} k_b} + \sqrt{2r_2 k_{12} k_b} \qquad (17a)$$

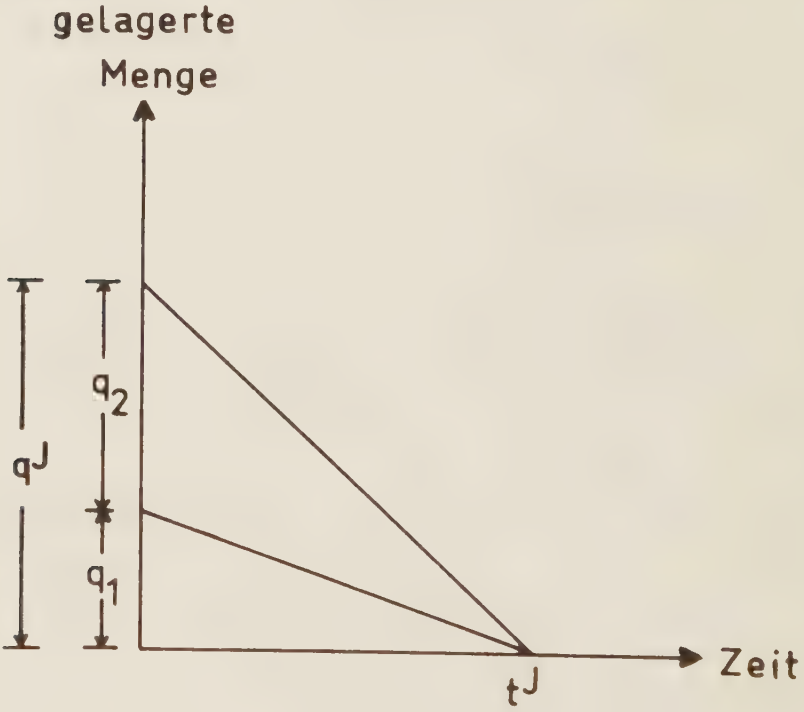
oder

$$K_{o,1+2} = \sqrt{2k_b} \left(\sqrt{r_1 k_{11}} + \sqrt{r_2 k_{12}}\right) \qquad (17b)$$

Welche Beziehungen gelten nun, wenn beide Güter gemeinsam bei einem neuen Lieferanten bestellt werden, d.h. wenn man von der isolierten Betrachtung übergeht zur Sammelbestellung oder Joint-Ordering-Politik? Für die beiden Güter wird jetzt nicht mehr isoliert das jeweils optimale Bestellintervall bestimmt; es wird vielmehr ein für beide Güter gemeinsames, optimales Bestellintervall t^J gesucht. Die Beschaffungskosten fallen jetzt nur einmal pro Sammelbestellung an.

Die zu einer Sammelbestellung zusammengefaßten Bestellmengen der beiden Güter könnte man jetzt als Bestellmenge q^J

eines sog. Sammelbestellgutes betrachten. Wie hoch muß jetzt der Anteil der beiden Güter an der Sammelbestellung sein?



Figur 3

Nach (4) gilt

$$q_1 = t^J r_1 \quad \text{und} \quad q_2 = t^J r_2$$

(J sei das Symbol für die Joint-Ordering-Politik)

Die Bestellmengen der beiden Güter müssen daher proportional ihren Nachfrageraten sein.

$$q_1 : q_2 = r_1 : r_2$$

Für die Bestellmenge der Sammelbestellung gilt

$$q^J = (r_1 + r_2)t^J$$

Die Bestellmengen der beiden Güter als Anteil an der Bestellmenge der Sammelbestellung ergibt sich zu

$$q_1 = q^J \frac{r_1}{r_1+r_2} \quad \text{und} \quad q_2 = q^J \frac{r_2}{r_1+r_2}$$

Damit ist garantiert, daß der Lagerbestand für beide Güter nach Ablauf des Bestellintervalls auf Null gesunken ist.

Wir können jetzt die Kostenfunktion für die Joint-Ordering-Politik analog zum klassischen Bestellmengenmodell entwickeln. Im Ansatz der Lagerhaltungskosten ergeben sich keine Änderungen. Die Lagerhaltungskosten erscheinen für jedes Gut. Lediglich die Bestellmengen q_1 bzw. q_2 werden jetzt durch q^J ausgedrückt. Eine wesentliche Änderung ergibt sich jedoch bei den Beschaffungskosten. Diese treten jetzt nur noch einmal auf. Die Kostenfunktion hat nun folgendes Aussehen:

$$K^J = \frac{k_{11}q^J}{2} \frac{r_1}{r_1+r_2} + \frac{k_{12}q^J}{2} \frac{r_2}{r_1+r_2} + \frac{k_b(r_1 + r_2)}{q^J} \qquad (18)$$

Man könnte auf den ersten Blick aber glauben, die Bildung einer sog. Sammelbestellmenge q^J sei mit unlösbaren Addierbarkeitsproblemen verbunden, weil Güter verschiedener Dimension, Gewichtsbezeichnung usw. zusammengefaßt werden. q^J steht in (18) jedoch nur in Verbindung mit einem Gewichtungsfaktor r_1/r_1+r_2 bzw. r_2/r_1+r_2. Letztlich steht in (18) nur $r_1 t^J k_{11}/2$ bzw. $r_2 t^J k_{12}/2$ und die Dimension lautet richtig Kosten pro Zeiteinheit. Das Addierbarkeitsproblem taucht also nicht auf. Man hätte die Kostenfunktion natürlich direkt nach t^J entwickeln können, was einige Autoren auch gemacht haben (vgl. den Exkurs 3.4.).

Differenziert man K^J in (18) nach q^J und setzt man die Ableitung gleich Null, so ergeben sich nach einigem Umformen folgende Beziehungen für die Joint-Ordering-Politik:

Optimale Bestellmenge der Sammelbestellung.

$$q_o^J = (r_1+r_2)\sqrt{\frac{2k_b}{r_1k_{11}+r_2k_{12}}} \tag{19}$$

Optimale Bestellmenge von Gut 1.

$$q_{o1}^J = q_o^J \frac{r_1}{r_1+r_2} = r_1\sqrt{\frac{2k_b}{r_1k_{11}+r_2k_{12}}} \tag{20a}$$

Optimale Bestellmenge von Gut 2.

$$q_{o2}^J = q_o^J \frac{r_2}{r_1+r_2} = r_2\sqrt{\frac{2k_b}{r_1k_{11}+r_2k_{12}}} \tag{20b}$$

Da hier $t = q^J/r_1+r_2$, erhält man für den optimalen gemeinsamen Bestellrhythmus

$$t_o^J = \sqrt{\frac{2k_b}{r_1k_{11}+r_2k_{12}}} \tag{21}$$

Die minimalen Gesamtlagerkosten pro Zeiteinheit der Joint-Ordering-Politik ergeben sich endlich zu

$$K_o^J = \sqrt{2k_b(r_1k_{11}+r_2k_{12})} \tag{22}$$

Nachdem jetzt die minimalen Gesamtlagerkosten sowohl für die separate Bestellpolitik als auch für die Joint-Ordering-Politik hergeleitet worden sind, kann ein Kostenvergleich beider Politiken erfolgen. Vergleicht man Beziehung (22) mit Beziehung (17b), so stellt man fest, daß

$$\sqrt{r_1k_{11}+r_2k_{12}} < \sqrt{r_1k_{11}} + \sqrt{r_2k_{12}} \tag{23}$$

Quadriert man nämlich beide Seiten, so ist die rechte Seite stets um das gemischte Glied $2\sqrt{r_1k_{11}r_2k_{12}}$ größer als die linke Seite. Die Kosten der Joint-Ordering-Politik sind daher unter den gemachten Annahmen stets niedriger als die Kosten der separaten Bestellpolitik.

Vergleicht man (15a) und (15b) mit (21), so erkennt man weiterhin, daß der optimale gemeinsame Bestellrhythmus t_o^J sowohl kleiner als t_{o1} wie auch t_{o2} ist, da der Nenner in der Beziehung (21) jeweils um das Glied r_2k_{12} bzw. r_1k_{11} größer ist als in (15a) und (15b).

Da $t_o^J < t_{o1}$ und $t_o^J < t_{o2}$, ist auch der durchschnittliche Lagerbestand bei der Joint-Ordering-Politik kleiner als bei der separaten Bestellpolitik, denn

$$\frac{q_o^J}{2} = \frac{r_1+r_2}{2}\, t_o^J < \frac{c_{o1}}{2} + \frac{q_{o2}}{2} = \frac{1}{2}r_1t_{o1} + \frac{1}{2}r_2t_{o2} \qquad (24)$$

Von Interesse sind auch die <u>relativen</u> Kostenersparnisse der Joint-Ordering-Politik gegenüber der separaten Bestellpolitik.

Setzt man in die Beziehung

$$\frac{K_{o,1+2} - K_o^J}{K_{o,1+2}} = \text{relative Kostenersparnis der Joint-Ordering-Politik} \qquad (25)$$

die gefundenen Ergebnisse von (17b) und (22) ein, so ergibt sich für die relativen Kostenersparnisse folgende allgemeine Beziehung:

$$1 - \frac{\sqrt{r_1k_{11} + r_2k_{12}}}{\sqrt{r_1k_{11}} + \sqrt{r_2k_{12}}} = \text{relative Kostenersparnis der Joint-Ordering-Politik} \qquad (26)$$

Interessant an der Beziehung (26) ist, daß die Höhe der Beschaffungskosten k_b für die relativen Kostenersparnisse vollkommen irrelevant ist.

Bildet man jetzt das Verhältnis

$$\rho = \frac{r_1k_{11}}{r_2k_{12}}$$

so kann man (26) auch wie folgt schreiben:

$$1 - \frac{\sqrt{1+\rho}}{1+\sqrt{\rho}} = 1 - \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\rho}}}{1+\sqrt{\frac{1}{\rho}}} \qquad (26a)$$

Die relativen Kostenersparnisse sind jetzt umso geringer, je mehr ρ von 1 abweicht. Einige Zahlenbeispiele werden dies später illustrieren.

Für $\rho = 1$, d.h. wenn $r_1 k_{11} = r_2 k_{12}$, erhalten wir die maximalen relativen Kostenersparnisse, denn die Beziehung $\sqrt{1+\rho}/\ 1+\sqrt{\rho}$ hat für $\rho = 1$ ihr Minimum.
Dies läßt sich auch noch wie folgt zeigen:
Quadriert man den Bruch in (26), so erhält man

$$\frac{r_1 k_{11} + r_2 k_{12}}{r_1 k_{11} + r_2 k_{12} + 2\sqrt{r_1 k_{11} r_2 k_{12}}} \qquad (27)$$

Für $r_1 k_{11} = r_2 k_{12}$ ist (27) mit dem Wert 1/2 ein Minimum. Aus (26) ergeben sich dann die maximalen relativen Kostenersparnisse zu

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{maximale relative Kostenersparnis der J-O-Politik bei 2 Gütern} \qquad (28)$$

D.h. im Zwei-Güter-Fall können die gesamten Lagerkosten durch die Joint-Ordering-Politik maximal um 29,28 % gegenüber der separaten Bestellpolitik gesenkt werden.

In Tabelle I sollen die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen an einigen künstlich konstruierten Beispielen illustriert werden. Die gefundenen Zahlenwerte bestätigen die bisherigen Aussagen.

1. Der optimale gemeinsame Bestellrhythmus t_o^J ist stets sowohl kleiner als t_{o1} wie auch kleiner als t_{o2}.
2. Der durchschnittliche Lagerbestand der Joint-Ordering-Politik ist kleiner als bei der separaten Bestellpolitik (da $q_{o1} + q_{o2} > q_o^J$).
3. Für $r_1 k_{11} \neq r_2 k_{12}$ liegen die Werte t_o^J und q_o^J dem t_o bzw. q_o der separaten Bestellpolitik am nächsten, für den $r_i k_{1i}$ am größten ist.
4. Die Kosten der Joint-Ordering-Politik sind stets niedriger als die Kosten der separaten Bestellpolitik.

Tabelle 1

Nr.	k_b	k_{11}	k_{12}	r_1	r_2	t_{01}	t_{02}	t_0^J	q_{01}	q_{02}	q_0^J	K_{01}	K_{02}	$K_{0,1+2}$	K_0^J	relative Kostenersparnis in %
1	100	10	10	1000	1000	0,1414	0,1414	0,1000	141,42	141,42	200,00	1414,21	1414,21	2828,42	2000,00	29,28
2	10	10	10	1000	1000	0,0447	0,0447	0,0316	44,72	44,72	63,20	447,21	447,21	894,42	632,46	29,28
3	1	10	10	1000	1000	0,0141	0,0141	0,0100	14,14	14,14	20,00	141,42	141,42	282,84	200,00	29,28
4	10	10	10	1000	100	0,0447	0,1414	0,0426	44,72	14,14	46,86	447,21	141,42	588,63	469,04	20,31
5	10	10	10	1000	10	0,0447	0,4472	0,0445	44,72	4,47	44,95	447,21	44,72	491,93	449,42	8,64
6	10	100	10	1000	1000	0,0141	0,0447	0,0134	14,14	44,72	26,80	1414,21	447,21	1861,42	1477,88	20,60
7	10	100	1	1000	1000	0,01414	0,1414	0,01406	14,14	141,42	28,12	1414,21	141,42	1555,63	1420,56	8,68

5. Die Höhe der Beschaffungskosten hat keinen Einfluß auf die relativen Kostenersparnisse der Joint-Ordering-Politik gegenüber der separaten Bestellpolitik (vgl. Beispiel 1-3).
6. Je stärker die Nachfrageraten divergieren, umso geringer werden ceteris paribus die relativen Kostenersparnisse (vgl. Beispiel 4 und 5).
7. Je stärker die Lagerhaltungskostensätze divergieren, umso mehr sinken ceteris paribus die relativen Kostenersparnisse (vgl. Beispiel 6 und 7).
8. Die Vorteile der Joint-Ordering-Politik schwinden jedoch erst dann erheblich, wenn die Nachfrageraten bzw. die Lagerhaltungskostensätze sehr stark divergieren (vgl. Beispiel 5 und 7).

3.2. Die Joint-Ordering-Politik für n Güter.

Die Beziehungen, die für den Zwei-Güter-Fall entwickelt wurden, lassen sich ohne Schwierigkeit auf den n-Güter-Fall übertragen. Es gilt somit nach (18) für die Lagerkostenfunktion

$$K^J = \frac{k_{11}q^J}{2}\frac{r_1}{r_1+r_2+..+r_n} + \frac{k_{12}q^J}{2}\frac{r_2}{r_1+r_2+...+r_n} + ...$$

$$+ \frac{k_{1n}q^J}{2}\frac{r_n}{r_1+r_2+..+r_n} + \frac{k_b(r_1+r_2+...+r_n)}{q^J} \qquad (29)$$

Um die Analogie des Modells bei Joint-Ordering-Politik zum klassischen Bestellmengenmodell noch anschaulicher zu machen, gehen wir ähnlich wie schon im Zwei-Güter-Fall vor.
Definieren wir

$$r^J = r_1 + r_2 + ... + r_n$$
$$q^J = (r_1 + r_2 + ... + r_n)t^J = r^J t^J$$

und

$$k_1^J = k_{11}\frac{r_1}{r_1+...+r_n} + ... + k_{1n}\frac{r_n}{r_1+...+r_n}$$

$$k_1^J = k_{11}\frac{r_1}{r^J} + \ldots + k_{1n}\frac{r_n}{r^J}$$

so ergibt sich analog zu (18) die Lagerkostenfunktion für n Güter bei der Joint-Ordering-Politik zu

$$K^J = \frac{q^J}{2}k_1^J + k_b\frac{r^J}{q^J} \tag{29a}$$

und für die optimale Sammelbestellmenge erhält man

$$q_o^J = \sqrt{\frac{2r^J k_b}{k_1^J}} \tag{30}$$

Man erkennt klar die gleiche Struktur der Beziehungen wie beim klassischen Bestellmengenmodell.

Ersetzt man jetzt r^J und k_1^J wieder durch die ausführlichere Schreibweise, so ergibt sich die optimale Bestellmenge der Sammelbestellung analog zu (19) zu

$$q_o^J = (r_1+r_2+\ldots+r_n)\sqrt{\frac{2k_b}{r_1k_{11}+r_2k_{12}+\ldots+r_nk_{1n}}} \tag{30a}$$

die optimale Bestellmenge eines Gutes i nach (20) zu

$$q_{oi}^J = r_i\sqrt{\frac{2k_b}{r_1k_{11}+r_2k_{12}+\ldots+r_nk_{1n}}} \tag{31}$$

der optimale gemeinsame Bestellrhythmus nach (21) zu

$$t_o^J = \sqrt{\frac{2k_b}{r_1k_{11}+r_2k_{12}+\ldots+r_nk_{1n}}} \tag{32}$$

die minimalen Gesamtlagerkosten pro Zeiteinheit zu

$$K_o^J = \sqrt{2k_b(r_1k_{11}+r_2k_{12}+\ldots+r_nk_{1n})} \tag{33}$$

die relative Kostenersparnis allgemein nach (26) zu

$$1 - \frac{\sqrt{r_1 k_{11} + r_2 k_{12} + \ldots + r_n k_{1n}}}{\sqrt{r_1 k_{11}} + \sqrt{r_2 k_{12}} + \ldots + \sqrt{r_n k_{1n}}} \qquad (34)$$

und schließlich für den Spezialfall

$r_1 k_{11} = r_2 k_{12} = \ldots = r_n k_{1n}$

die maximalen relativen Kostenersparnisse nach (28) zu

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} = \text{maximale relative Kostenersparnis der Joint-Ordering-Politik für n Güter} \qquad (35)$$

In Tabelle II und Figur 3 sollen die maximalen relativen Kostenersparnisse der Joint-Ordering-Politik als Funktion der Zahl n der zu einer Sammelbestellung zusammengefaßten Güter etwas näher untersucht werden.

Tabelle II

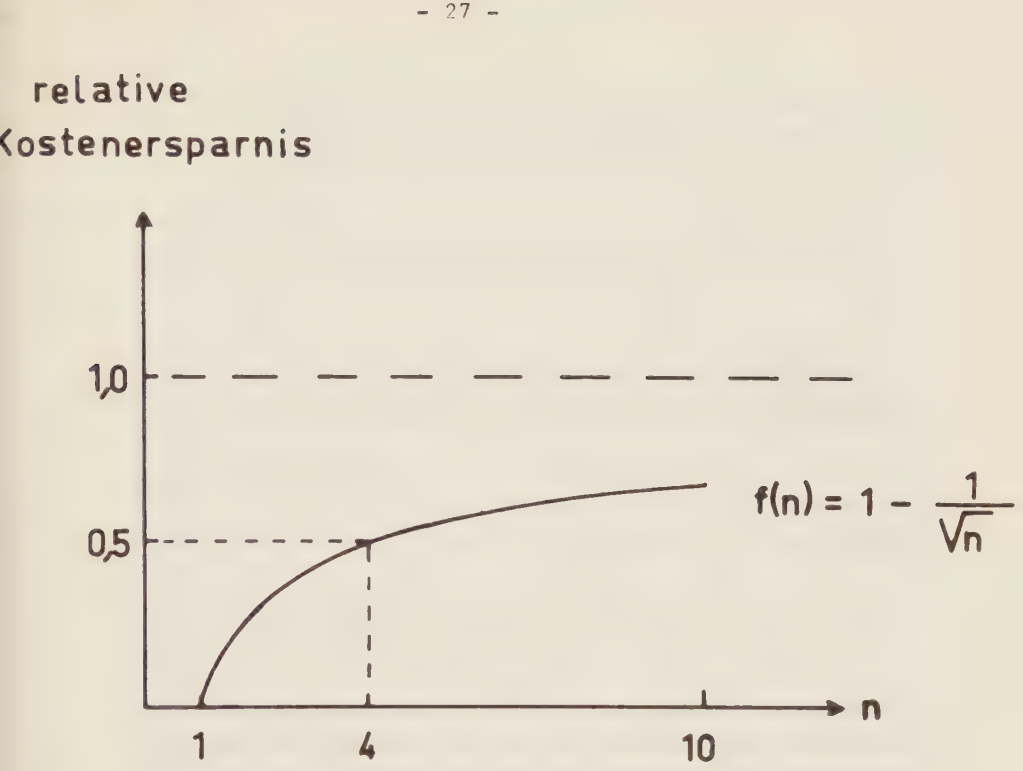
n	$1 - n^{-1/2}$	n	$1 - n^{-1/2}$
1	o,oooo	1o	o,6838
2	o,2928	15	o,7419
3	o,4227	2o	o,7764
4	o,5ooo	25	o,8ooo
5	o,5528	5o	o,8586
6	o,5918	1oo	o,9ooo
7	o,6221	1ooo	o,9362
8	o,6465	1oooo	o,99oo
9	o,6667		

$$f(n) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \quad ; \lim_{n\to\infty} f(n) = 1$$

$$f'(n) = \frac{1}{2\sqrt{n^3}} \quad ; \lim_{n\to\infty} f'(n) = 0$$

Wie die Tabelle II zeigt, sind bereits bei der Zusammenfassung von 4 Gütern 5o% der Kostenersparnisse erzielt. Die Kostenersparnisse steigen dann nur noch langsam an.

Unter den bisherigen Annahmen hat sich die Joint-Ordering-Politik als vorteilhaft erwiesen. In dem nächsten Abschnitt sollen noch zwei kleine Modifikationen behandelt werden.



Figur 4

3.3. Zwei kleine Modifikationen der Joint-Ordering-Politik für n Güter.

Grundlegende Annahme war bisher, daß die Beschaffungskosten k_{b1} für Gut 1 und k_{b2} für Gut 2 bei der separaten Politik gleich sind, und daß auch die Beschaffungskosten k_b^J der Joint-Ordering-Politik gleichhoch sind, d.h. $k_{b1} = k_{b2} = k_b = k_b^J$.

Jetzt soll zunächst angenommen werden, die Beschaffungskosten k_{b1} und k_{b2} blieben weiterhin gleich, aber die Beschaffungskosten k_b^J der Joint-Ordering-Politik sollen ansteigen. Die Einkaufsabteilung eines Warenhauses z.B. weiß aber nicht genau, wie hoch die neuen Beschaffungskosten sein werden. Gefragt ist also: Wie hoch darf k_b^J

höchstens sein, damit die Joint-Ordering-Politik noch vorteilhaft bleibt?

Gefordert ist:

$$K_o^J < K_{o1} + K_{o2} + \ldots + K_{on}$$

oder nach (33) und (16)

$$\sqrt{2k_b^J(r_1k_{11}+r_2k_{12}+\ldots+r_nk_{1n})} < \sqrt{2k_br_1k_{11}} + \sqrt{2k_br_2k_{12}} + \ldots + \sqrt{2k_br_nk_{1n}} \quad (36)$$

Das bedeutet, daß solange

$$k_b^J < \frac{k_b(\sqrt{r_1k_{11}} + \sqrt{r_2k_{12}} + \ldots + \sqrt{r_nk_{1n}})^2}{r_1k_{11} + r_2k_{12} + \ldots + r_nk_{1n}} \quad (37)$$

die Beschaffungskosten der Joint-Ordering-Politik kleiner sind als der Ausdruck auf der rechten Seite von Beziehung (37), die Joint-Ordering-Politik der separaten Bestellpolitik vorzuziehen ist.

Die Beziehung (37) kann noch etwas verallgemeinert werden, wenn man die Gleichheit der Beschaffungskosten für alle Güter bei der separaten Bestellpolitik aufhebt, d.h. $k_{bi} \neq k_{bj} \neq k_b^J$

Nach (33) und (16) muß, damit die Joint-Ordering-Politik weiterhin vorteilhaft bleibt, hier gefordert werden, daß

$$\sqrt{2k_b^J(r_1k_{11}+r_2k_{12}+\ldots+r_nk_{1n})} < \sqrt{2k_{b1}r_1k_{11}} + \sqrt{2k_{b2}r_2k_{12}} + \ldots + \sqrt{2k_{bn}r_nk_{1n}} \quad (38)$$

Demnach muß k_b^J folgende Bedingung erfüllen:

$$k_b^J < \frac{(\sqrt{k_{b1}r_1k_{11}} + \sqrt{k_{b2}r_2k_{12}} + \ldots + \sqrt{k_{bn}r_nk_{1n}})^2}{r_1k_{11} + r_2k_{12} + \ldots + r_nk_{1n}} \qquad (39)$$

Praktisch dürften die hier behandelten Modifikationen keine besondere Bedeutung haben. Ein mehr Erfolg versprechender Ansatz wird später behandelt.

3.4. Exkurs: Die Kostenfunktion der Joint-Ordering-Politik in Abhängigkeit vom Bestellintervall t^J.[14]

Da in den weiteren Untersuchungen auch der Betrachtung des Bestellintervalls eine große Bedeutung zukommt, soll auch die Kostenfunktion in Abhängigkeit von t^J hergeleitet werden.

Nach der Beziehung (4) gilt

$$t_i = \frac{q_i}{r_i} \quad \text{bzw.} \quad q_i = r_i t_i \qquad (4)$$

Da bei der Joint-Ordering-Politik das Bestellintervall für alle Güter das gleiche ist, ergibt sich für die Bestellmenge jedes Gutes innerhalb der Sammelbestellung

$$q_i = r_i t^J \qquad (40)$$

und die Beschaffungskosten pro Zeiteinheit für alle Güter betragen k_b/t^J. Die Bestellmenge q^J der Sammelbestellung ist

$$q^J = q_1 + q_2 + \ldots + q_n = (r_1 + r_2 + \ldots + r_n)t^J \qquad (41)$$

Setzt man q^J aus (41) in (29) ein, so erhält man die Lagerkostenfunktion der Joint-Ordering-Politik in Abhängigkeit von t^J.

---

14) Vgl. M.K.Starr und D.W.Miller, Inventory Control, ...a.a.O., S.1o4-1o5; E.Naddor, Inventory Systems, ...a.a.O., S.57-58; J.F.Balintfy, On a basic class of multi-item inventory problems, in: Management Science, Bd.1o, 1964, S.287-297, hier bes. S.288.

$$K^J = \frac{k_{11} r_1 t^J}{2} + \frac{k_{12} r_2 t^J}{2} + \ldots + \frac{k_{1n} r_n t^J}{2} + \frac{k_b}{t^J} \qquad (42)$$

Differenziert man (42) nach t^J und setzt man die Ableitung gleich Null, so ergeben sich die bereits hergeleiteten Beziehungen (30) - (33).

4. Joint-Ordering-Politik, angewandt auf das deterministische Fehlmengenmodell.

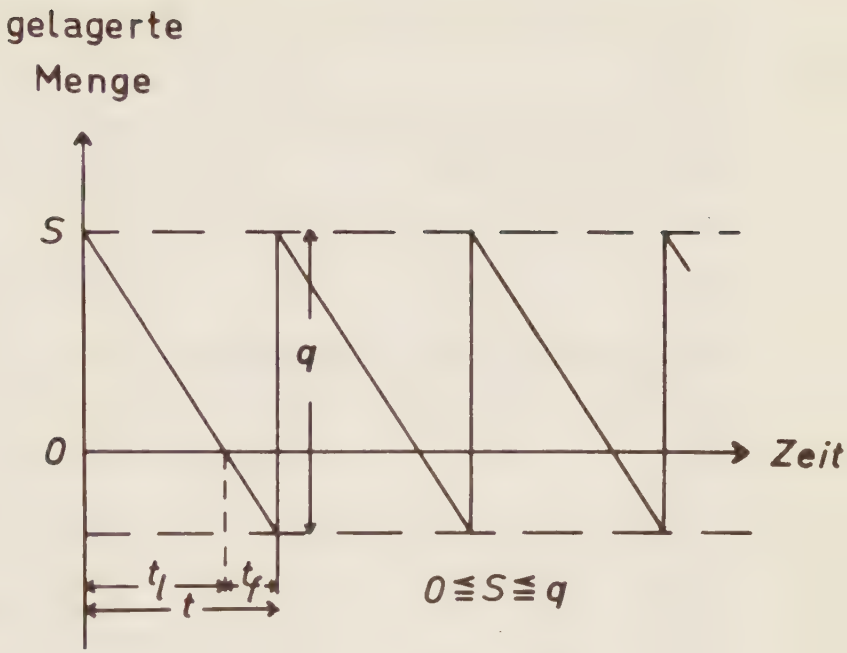
4.1. Das deterministische Fehlmengenmodell für ein Gut.[15)]

Während im klassischen Bestellmengenmodell nur die Lagerhaltungs- und Beschaffungskosten eine Rolle spielen (Typ K_L, K_B), treten jetzt zusätzlich noch die Fehlmengenkosten auf. Das deterministische Fehlmengenmodell ist daher vom allgemeinen Typ (K_L, K_F, K_B). Es kann als eine Erweiterung des klassischen Bestellmengenmodells betrachtet werden, wenn man die Annahme, daß keine Fehlmengen auftreten dürfen (d.h. die Fehlmengenkosten sind unendlich) fallen läßt.

Figur 5 illustriert die Lagerbewegung.
In diesem Lagerhaltungssystem gelten die folgenden Annahmen:

1. Die Nachfrage erfolgt deterministisch mit einer konstanten Rate von r Mengeneinheiten pro Zeiteinheit.
2. Die Bestellmenge q ist konstant; Fehlmengen werden nachgeliefert.
3. Das Bestellintervall t ist konstant; das Lagerhaltungsniveau beträgt S.
4. Die Lieferfrist ist Null und die Wiederauffüllrate ist unendlich.
5. Die Lagerhaltungskosten k_1 sind konstant pro Mengen- und Zeiteinheit.
6. Die Fehlmengenkosten k_f sind konstant pro Mengen- und Zeiteinheit.
7. Die Beschaffungskosten k_b sind konstant pro Bestellung.

15) Vgl. Churchman-Ackoff-Arnoff, ...a.a.O., S.194-196; E.Naddor, Inventory Systems, ...a.a.O., S.70-83.



Figur 5

Aus diesen Annahmen lassen sich nun folgende Beziehungen herleiten:
Für das Bestellintervall t gilt wie im klassischen Bestellmengenmodell

$$t = \frac{q}{r} \qquad (4)$$

Das gleiche gilt für die

$$\text{Bestellhäufigkeit} = \frac{1}{t} = \frac{r}{q} \qquad (5)$$

Jedoch gilt jetzt anstatt (6) für den

$$\text{durchschnittlichen Lagerbestand} = \frac{S}{2} \qquad (43)$$

Hinzu kommt die Beziehung für den

$$\text{durchschnittlichen Fehlmengenbestand} = \frac{q - S}{2} \qquad (44)$$

Zu beachten ist jedoch, daß ein Lagerbestand nur für die Zeitspanne t_l und ein Fehlmengenbestand nur für die Zeitspanne t_f auftritt. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache und unter Zuhilfenahme der Annahmen (5)-(7) und der Beziehungen (4), (5), (43) und (44) erhält man für das deterministische Fehlmengenmodell folgende Gesamtlagerkostenfunktion pro Zeiteinheit.

$$K = k_l \frac{S}{2} \frac{t_l}{t} + k_f \frac{q-S}{2} \frac{t_f}{t} + \frac{k_b r}{q} \qquad (45)$$

Die Beziehung (45) läßt sich vereinfachen, wenn man berücksichtigt, daß nach dem Strahlensatz (vgl.Figur 5) gilt:

$$\frac{t_l}{t} = \frac{S}{q} \qquad (46a)$$

und

$$\frac{t_f}{t} = \frac{q - S}{q} \qquad (46b)$$

Setzt man (46a) und (46b) in (45) ein, so erhält man:

$$K = \frac{S^2}{2q} k_l + \frac{(q - S)^2}{2q} k_f + \frac{k_b r}{q} \qquad (47)$$

Die Gesamtlagerkosten sind jetzt eine Funktion der Variablen q und S. Um das Kostenoptimum zu bestimmen, wird (47) zunächst nach q und S partiell abgeleitet. Dies ergibt:

$$\frac{\delta K}{\delta q} = \frac{q - S}{q} k_f - \frac{S^2 k_l + (q-S)^2 k_f + 2rk_b}{2q^2} \qquad (48)$$

$$\frac{\delta K}{\delta S} = \frac{S}{q} k_l - \frac{q - S}{q} k_f \qquad (49)$$

Dann werden die partiellen Ableitungen (48) und (49) gleich Null gesetzt, und das Gleichungssystem wird gelöst. Aus (49) ergibt sich

$$S = q \frac{k_f}{k_l + k_f} \qquad (50)$$

und aus (48) erhält man zunächst

$$2rk_b = q^2k_f - (k_l + k_f)S^2 \qquad (51)$$

Setzt man nun S aus (50) in (51) ein, dann errechnet man nach einigen Umformungen für die optimale Bestellmenge im Fehlmengenmodell:

$$q_o = \sqrt{2r\frac{k_b}{k_l}}\sqrt{\frac{k_l + k_f}{k_f}} \qquad (52)$$

Folglich gilt nach (50) für das optimale Lagerhaltungsniveau

$$S_o = \sqrt{2r\frac{k_b}{k_l}}\sqrt{\frac{k_f}{k_l + k_f}} \qquad (53)$$

Letztlich ergibt sich, wenn man (52) und (53) in (47) einsetzt, für die minimalen Gesamtlagerkosten des Fehlmengenmodells die Beziehung[16)]

$$K_o = \sqrt{2rk_bk_l}\sqrt{\frac{k_f}{k_l + k_f}} \qquad (54)$$

Die Beziehung (54) unterscheidet sich von der Beziehung (12) nur durch den zweiten Wurzelausdruck, der den Einfluß der Fehlmengenkosten auf die Lagerkosten wiederspiegelt. Läßt man Fehlmengen zu, so sind die Gesamtlagerkosten im allgemeinen niedriger als im klassischen Bestellmengenmodell. Je höher die Fehlmengenkosten pro Mengen- und Zeiteinheit jedoch werden, umso geringer wird der Kostenunterschied. Für $k_f = \infty$ reduziert sich (54) zu (12). Die Annahme unendlicher Fehlmengenkosten (bzw. es dürfen keine Fehlmengen auftreten) lag ja auch dem klassischen Bestellmengenmodell zugrunde.

---

16) Daß es sich tatsächlich um ein Kostenminimum handelt, läßt sich an den partiellen Ableitungen von (48) und (49) zeigen. Vgl. dazu E.Naddor, Inventory Systems, ... a.a.O., S.81.

4.2. Die Joint-Ordering-Politik für zwei Güter beim deterministischen Fehlmengenmodell.

Nachdem sich die Joint-Ordering-Politik unter der Annahme, daß die Beschaffungskosten k_b unabhängig sind von der Anzahl verschiedener Güter, die zu einer Bestellung zusammengefaßt werden, für das klassische Bestellmengenmodell als eindeutig überlegen gegenüber der separaten Bestellpolitik erwiesen hat, soll hier jetzt untersucht werden, ob dies auch uneingeschränkt für das deterministische Fehlmengenmodell gilt. Der Einfachheit halber erfolgt die Untersuchung für den Zwei-Güter-Fall.

Figur 6 illustriert die Situation vor der Joint-Ordering-Politik.

Für Gut 1 und Gut 2 soll nun ein gemeinsames optimales Bestellintervall t_o^J gesucht werden.

Die Einführung der Joint-Ordering-Politik hat ein gemeinsames Bestellintervall t^J für beide Güter zur Folge, d.h.

$$t_1 = t_2 = t^J \tag{55}$$

Es muß weiterhin gelten nach (4)

$$t^J = \frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} \tag{56}$$

bzw.

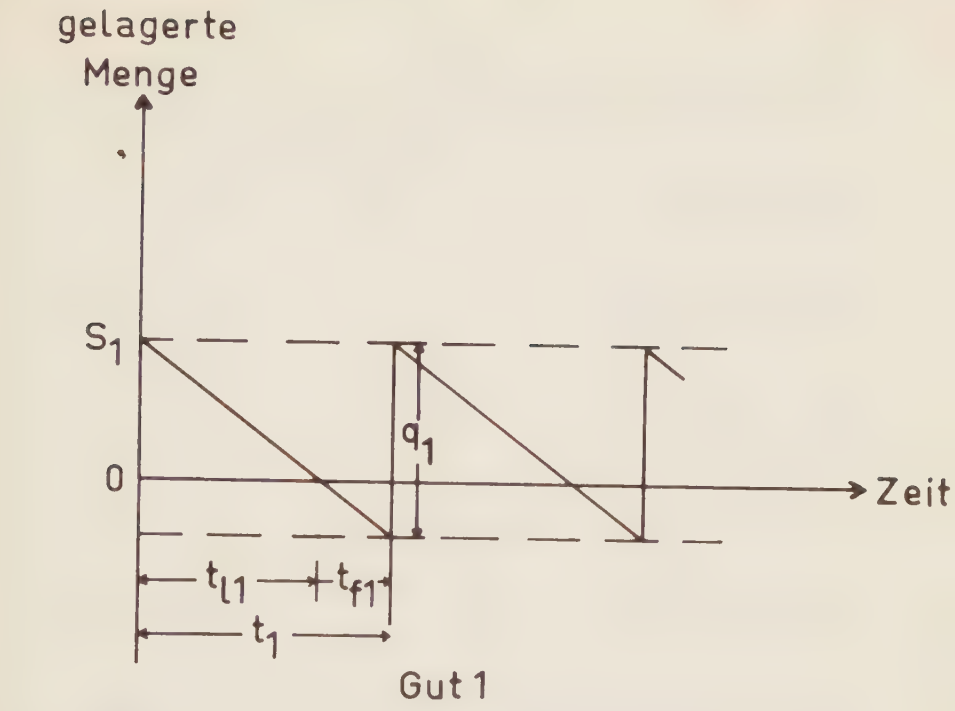
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{q_1}{q_2} \tag{57}$$

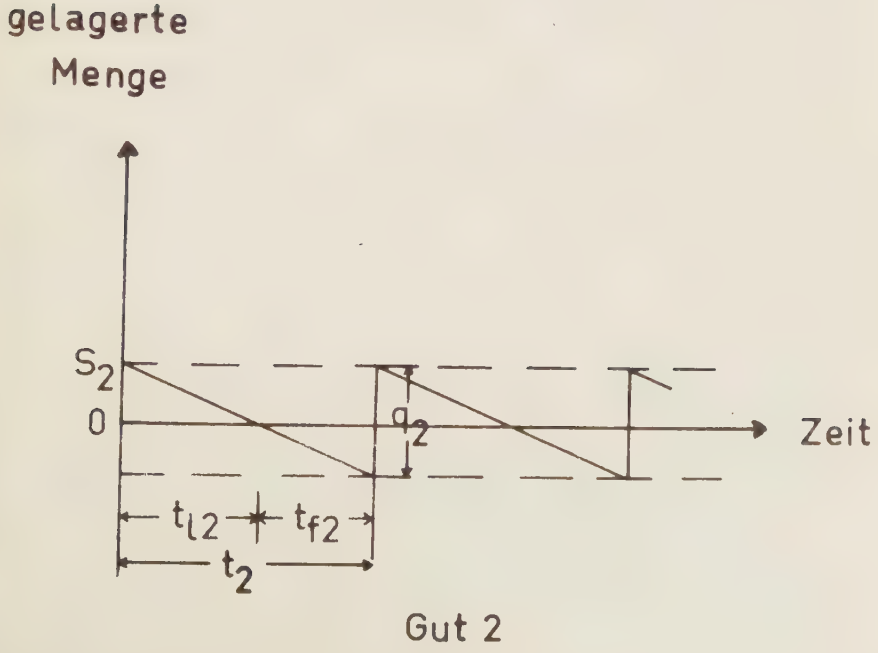
Außerdem gilt:

$$q_1 = r_1 t^J \quad \text{und} \quad q_2 = r_2 t^J \tag{58}$$

und demnach auch

$$q^J = q_1 + q_2 = (r_1 + r_2)t^J = r^J t^J \tag{59}$$


gelagerte
Menge
S1
0
q1
Zeit
tl1
tf1
t1
Gut 1


gelagerte
Menge
S2
0
q2
Zeit
tl2
tf2
t2
Gut 2

Figur 6

Aus (58) und (59) folgt weiterhin

$$q_1 = q^J \frac{r_1}{r_1+r_2} \quad \text{und} \quad q_2 = q^J \frac{r_2}{r_1+r_2} \tag{60}$$

Ähnlich gilt dann auch, wenn wir zur Vereinfachung definieren[16a)]

$$t_{l1} = t_{l2} = t_l^J \quad \text{und} \tag{61a}$$

$$t_{f1} = t_{f2} = t_f^J \quad \text{daß} \tag{61b}$$

$$S_1 = S^J \frac{r_1}{r_1+r_2} \quad \text{und} \quad S_2 = S^J \frac{r_2}{r_1+r_2} \tag{62}$$

Weiterhin definieren wir

$$k_l^J = k_{l1} \frac{r_1}{r_1+r_2} + k_{l2} \frac{r_2}{r_1+r_2} \quad \text{und} \tag{63a}$$

$$k_f^J = k_{f1} \frac{r_1}{r_1+r_2} + k_{f2} \frac{r_2}{r_1+r_2} \tag{63b}$$

Für die Gesamtlagerkostenfunktion pro Zeiteinheit ergibt sich daher, analog zu (45), für das deterministische Fehlmengenmodell bei Anwendung der Joint-Ordering-Politik folgende Beziehung:

$$K^J = \frac{S^J}{2} \frac{t_l^J}{t^J} k_l^J + \frac{q^J - S^J}{2} \frac{t_f^J}{t^J} k_f^J + \frac{k_b r^J}{q^J} \tag{64}$$

Da jedoch, analog zu (46)

$$\frac{t_l^J}{t^J} = \frac{S^J}{q^J} \quad \text{und} \tag{65a}$$

$$\frac{t_f^J}{t^J} = \frac{q^J - S^J}{q^J} \tag{65b}$$

16a) Hebt man (61) auf, dann stehn in (66) statt S^J die S_i und es ist ein umfangreicheres System von partiellen Ableitungen zu lösen.

ergibt sich letztlich für die Gesamtlagerkostenfunktion pro Zeiteinheit bei der Joint-Ordering-Politik

$$K^J = \frac{(S^J)^2}{2q^J} k_l^J + \frac{(q^J - S^J)^2}{2q^J} k_f^J + \frac{k_b r^J}{q^J} \tag{66}$$

Analog zu (52)-(54) erhält man für die optimale Sammelbestellmenge der Joint-Ordering-Politik im Fehlmengenmodell

$$q_o^J = \sqrt{\frac{2r^J k_b}{k_l^J}} \sqrt{\frac{k_l^J + k_f^J}{k_f^J}} \tag{67}$$

und für das optimale Lagerhaltungsniveau

$$S_o^J = \sqrt{\frac{2r^J k_b}{k_l^J}} \sqrt{\frac{k_f^J}{k_l^J + k_f^J}} \tag{68}$$

und nach (59) für das gemeinsame Bestellintervall

$$t_o^J = \sqrt{\frac{2k_b}{r^J k_l^J}} \sqrt{\frac{k_l^J + k_f^J}{k_f^J}} \tag{69}$$

Für die minimalen Gesamtlagerkosten des Fehlmengenmodells bei Anwendung der Joint-Ordering-Politik erhält man schließlich

$$K_o^J = \sqrt{2r^J k_l^J k_b} \sqrt{\frac{k_f^J}{k_l^J + k_f^J}} \tag{70}$$

Im Fehlmengenmodell hat sich die Benutzung einer abkürzenden Schreibweise und die Analogie zum einfachen Fehlmengenmodell als sehr nützlich für die Ableitungen erwiesen. Eine Ableitung der Beziehungen ohne die abkürzende Schreibweise führt zu recht unhandlichen Beziehungen, was man leicht sehen kann, wenn man die r^J, k_l^J und k_f^J in (67) - (70) wieder durch die ausführliche Schreibweise ersetzt.

4.3. Vergleich der Joint-Ordering-Politik und der separaten Bestellpolitik für das deterministische Fehlmengenmodell mit zwei Gütern.

Wenn die Joint-Ordering-Politik der separaten Bestellpolitik vorgezogen werden soll, muß folgende Ungleichung erfüllt sein (nach (70) und (54)):

$$K_o^J < K_{o1} + K_{o2} = \sqrt{2r_1 k_{11} k_b \frac{k_{f1}}{k_{11}+k_{f1}}} + \sqrt{2r_2 k_{12} k_b \frac{k_{f2}}{k_{12}+k_{f2}}} \tag{71}$$

Ob die Ungleichung (71) tatsächlich erfüllt ist, kann nicht ohne weiteres gesagt werden, da die auftretenden Ausdrücke recht kompliziert sind.

Lediglich für den Spezialfall, daß $r_1 = r_2$, $k_{11} = k_{12}$ und $k_{f1} = k_{f2}$, erhält man aus (70) und (71) schnell die Beziehung

$$K_o^J = \sqrt{2}\,(K_{o1} + K_{o2})/2 \tag{72}$$

d.h. für die relative Kostenersparnis der Joint-Ordering-Politik ergibt sich die schon bei dem klassischen Bestellmengenmodell abgeleitete Beziehung $1 - 1/\sqrt{2}$ (vgl. Beziehung (28)).

Für den allgemeinen Fall kommt man nach mühsamem Umformen zu der folgenden Ungleichung, die erfüllt sein muß:

$$(k_{11}k_{f2} - k_{12}k_{f1})^2 < 2\,r_1(k_{11}+k_{f1}) + r_2(k_{12}+k_{f2}) \cdot \sqrt{\frac{k_{11}k_{12}k_{f1}k_{f2}(k_{11}+k_{f1})(k_{12}+k_{f2})}{r_1 r_2}} \tag{73}$$

Auch nach dieser Umformung läßt sich die Frage nach der Vorteilhaftigkeit der Joint-Ordering-Politik nicht allgemein beantworten.

Tabelle III bringt einige Beispiele, die illustrieren, daß auch im Fehlmengenmodell bei Joint-Ordering-Politik, ähnlich wie im Modell ohne Fehlmengen, lediglich die Verhältnisse der k_{li}, k_{fi} und r_i untereinander für die Höhe der relativen Kostenersparnisse ausschlaggebend sind.

Es kann behauptet werden, daß die Joint-Ordering-Politik, angewandt auf das deterministische Fehlmengenmodell, praktisch immer der separaten Bestellpolitik vorzuziehen ist. Die maximalen relativen Kostenersparnisse betragen auch hier (für den schon erwähnten Spezialfall)

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} = \text{maximale relative Kostenersparnis der Joint-Ordering-Politik für n Güter}$$

5. Joint-Ordering-Politik, angewandt auf ein Modell mit Mengenrabatten.

5.1. Darstellung eines einfachen Rabattmodells.[17)]

Solange der Preis eines Gutes unabhängig von der bestellten Menge ist, kann er als irrelevante Größe in den Lagerhaltungsmodellen unberücksichtigt bleiben. In der Praxis werden aber oft bei Bestellung größerer Mengen eines Gutes sog. Mengenrabatte gewährt. Ist dies der Fall, dann muß dieser Tatsache in den entsprechenden Lagerhaltungsmodellen explizit Rechnung getragen werden.

Im folgenden soll das klassische Bestellmengenmodell dahingehend erweitert werden, daß diskrete Mengenrabatte Berücksichtigung finden. Der Preis p_i einer Einheit des Gutes i ist jetzt eine Funktion der bestellten Menge q_i.

---

17) Vgl. Churchman-Ackoff-Arnoff, a.a.O., Kap.9; F.Hanssmann, Operations Research...a.a.O., S.17-18; G. Hadley und T.H.Whitin, Analysis of Inventory Systems,... a.a.O., S. 62-66; E.Naddor, Inventory Systems, ...a.a.O., S. 94-96; M.Starr und D.W.Miller, Inventory Control, ...a.a.O., S. 84-86.

Tabelle III

Nr.	k_b	k_{11}	k_{12}	k_{f1}	k_{f2}	r_1	r_2	K_{o1}	K_{o2}	$K_{o,1+2}$	K_o^J	$\frac{K_{o,1+2} - K_o^J}{K_{o,1+2}} \cdot 100$ %
1	10	10	1o	1o	1o	1o	1o	31,62	31,62	63,24	44,71	29,28
2	10	100	1o	1o	1o	1o	1o	42,64	31,62	74,26	58,23	21,59
3	1o	1o	1o	100	1o	1o	1o	42,64	31,62	74,26	58,23	21,59
4	1o	1o	1o	1o	1o	100	1o	1oo,oo	31,62	131,62	1o4,91	2o,29

$$p_i(q_i) = \begin{cases} p_{i1} & \text{für } q_{i1} \leqq q_i < q_{i2} \\ p_{i2} & \text{für } q_{i2} \leqq q_i < q_{i3} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ p_{i,n-1} & \text{für } q_{i,n-1} \leqq q_i < q_{in} \\ p_{in} & \text{für } q_i \geqq q_{in} \end{cases} \tag{74}$$

Bestellmengen, die kleiner als q_{i1} sind, seien nicht erlaubt.

Es existieren n Preise für Gut i in Abhängigkeit von der bestellten Menge (d.h. n Preisklassen). Während die q_{i1}, q_{i2},... ansteigen, fallen die entsprechenden Preise p_{i1}, p_{i2},...

Da bei den Lagerhaltungskosten k_l oft die Zinskosten die wichtigste Rolle spielen, kann man allgemein annehmen, daß zwischen den Lagerhaltungskosten k_l und dem Preis p ein proportionaler Zusammenhang besteht. Die Lagerhaltungskosten k_l können daher mit Hilfe einer Proportionalitätskonstante c als Funktion des Preises angesehen werden.

$$k_{li} = c_i p_i(q_i) \tag{75}$$

Die Beschaffungskosten k_b bestehen jetzt aus einem fixen Kostenelement k_{bf} (dies entspricht den Bestellkosten k_b des Elementarmodells) und den Anschaffungskosten $q_i p_i(q_i)$, d.h.

$$k_{bi} = k_{bf} + q_i p_i(q_i) \tag{76}$$

Da alle q/r Zeiteinheiten (vgl. (4)) eine Bestellung erfolgt, lautet die Gesamtlagerkostenfunktion pro Zeiteinheit in diesem Modell

$$K_i(q_i) = \frac{1}{2} c_i p_{ij} q_i + \frac{k_{bf} r_i}{q_i} + r_i p_{ij} \tag{77}$$

mit $q_{ij} \leqq q_i < q_{i,j+1}$, $j = 1,2,\ldots,n$

Die Bestimmung der optimalen Bestellmenge q_{io} aus (77) kann nur auf iterativem Wege erfolgen. Die Kostenfunktion (77) ist nicht mehr stetig. Sie weist bei n Preisklassen n-1 Sprungstellen auf. Diese Stellen bezeichnen die Mindestbestellmengen q_{ij} für die die Preisklasse p_{ij} gilt.

1. ZUnächst werden die den jeweiligen Mindestmengen q_{ij} einer Rabattklasse entsprechenden Gesamtlagerkosten pro Zeiteinheit nach (77) berechnet. Aus diesen Randwerten wird dasjenige q_{ijo} ausgewählt, das zu den geringsten Kosten führt ($K_i(q'_{ijo})$).
2. Läßt man vorerst unberücksichtigt, daß jedes p_{ij} nur für ein bestimmtes Intervall gilt, erhält man aus (77) n stetige Gesamtlagerkostenfunktionen, für die nach der Beziehung

$$q''_{ijo} = \sqrt{\frac{2r_i k_{bf}}{c_i p_{ij}}} \qquad (78)$$

n "optimale" Bestellmengen q''_{ijo} errechnet werden. Jetzt erinnert man sich wieder der Nebenbedingung, daß jedes p_{ij} nur für ein bestimmtes Intervall $q_{ij} \leqq q_i < q_{i,j+1}$ gilt. Man wählt daher nur diejenigen q''_{ijo} aus, die in das ihnen jeweils entsprechende Intervall fallen, für die also gilt

$$q_{ij} \leqq q''_{ijo} = \sqrt{\frac{2r_i k_{bf}}{c_i p_{ij}}} < q_{i,j+1} \qquad (79)$$

D.h. man berücksichtigt nur die zulässigen Werte. Aus den zulässigen Werten wählt man jetzt das q''_{ijo} aus, das zum Kostenminimum $K_i(q''_{ijo})$ der stetigen Bereiche der Kostenfunktion (77) führt.

3. In einem dritten und letzten Schritt werden das Minimum der Funktion im stetigen Bereich mit dem Randminimum verglichen. Ist

$$K_i(q'_{ijo}) < K_i(q''_{ijo})$$

dann wird die Mindestmenge q_{ijo} dieser Rabattklasse bestellt. Ist hingegen

$$K_i(q'_{ijo}) > K_i(q''_{ijo})$$

so wird genau die nach (78) errechnete Bestellmenge q''_{ijo} bestellt.
Soweit die Darstellung des iterativen Lösungsverfahrens für dieses einfache Rabattmodell.

5.2. Die Joint-Ordering-Politik für zwei Güter beim Rabattmodell.

Ist die Joint-Ordering-Politik auch im Rabattmodell vorteilhaft? Diese Frage soll im folgenden für den Fall zweier Güter untersucht werden.

Gegeben sei ein Gut 1 mit i = 1,2,...,n Preisklassen.

$$p_1(q_1) = \begin{cases} p_{11} & \text{für } q_{11} \leqq q_1 < q_{12} \\ p_{12} & \text{für } q_{12} \leqq q_1 < q_{13} \\ \vdots & \\ p_{1,n-1} & \text{für } q_{1,n-1} \leqq q_1 < q_{1n} \\ p_{1n} & \text{für } q_1 \geqq q_{1n} \end{cases} \tag{79a}$$

und ein Gut 2 mit j = 1,2,...,m Preisklassen

$$p_2(q_2) = \begin{cases} p_{21} & \text{für } q_{21} \leqq q_2 < q_{22} \\ p_{22} & \text{für } q_{22} \leqq q_2 < q_{23} \\ \vdots & \\ p_{2,m-1} & \text{für } q_{2,m-1} \leqq q_2 < q_{2m} \\ p_{2m} & \text{für } q_2 \geqq q_{2m} \end{cases} \tag{79b}$$

Nach (75) betragen die Lagerhaltungskosten k_{11} für Gut 1

$$k_{11} = c_1 p_1(q_1) \tag{80a}$$

und für Gut 2

$$k_{12} = c_2 p_2(q_2) \tag{80b}$$

Das fixe Kostenelement k_{bf} in den Beschaffungskosten sei für beide Güter gleich. Für die Beschaffungskosten ergibt sich demnach für Gut 1

$$k_{b1} = k_{bf} + q p_1(q) \tag{81a}$$

und für Gut 2

$$k_{b2} = k_{bf} + q p_2(q) \tag{81b}$$

Wie schon im Elementarmodell erläutert, verlangt die Joint-Ordering-Politik einen gemeinsamen Bestellrhythmus für beide Güter. Es wird eine optimale Bestellmenge q^J errechnet. Diese mit dem jeweiligen Anteil $r_i/\sum r_i$ multipliziert, zeigt an, wieviel von Gut i bei der Sammelbestellung bestellt werden soll. Die bestellfixen Kosten k_{bf} fallen nur einmal an. Analog zu (18) und (77) ergibt sich daher für die Gesamtlagerkostenfunktion pro Zeiteinheit der Joint-Ordering-Politik im Rabattmodell

$$K^J(q^J) = \frac{1}{2} q^J \left(c_1 p_{1i} \frac{r_1}{r_1+r_2} + c_2 p_{2j} \frac{r_2}{r_1+r_2} \right) + r_1 p_{1i} + r_2 p_{2j} + \frac{k_{bf}(r_1+r_2)}{q^J}$$

$$\text{mit } q_{1i} \leqq q^J \frac{r_1}{r_1+r_2} = q_1^J < q_{1,i+1} \tag{82}$$

$$\text{und } q_{2j} \leqq q^J \frac{r_2}{r_1+r_2} = q_2^J < q_{2,j+1}$$

Die Nebenbedingungen bedeuten, daß die durch Aufspaltung des gemeinsamen q^J gewonnenen q_1^J bzw. q_2^J in die

Intervalle fallen, deren p_{1i} bzw. p_{2j} in (82) eingesetzt wurde, d.h. das q^J muß zulässig sein.

Die Bestimmung der optimalen Bestellmengen q^J_{1io} für gut 1 und q^J_{2jo} für Gut 2 erfolgt auch hier iterativ, ähnlich wie im einfachen Rabattmodell.

1. Da wir zwei Güter mit n bzw. m Preisklassen haben, gibt es maximal n + m - 2 Sprungstellen (bei n bzw. m Preisklassen gibt es n-1 bzw. m-1 Sprungstellen) in der Gesamtlagerkostenfunktion, wenn die Intervallgrenzen der beiden Güter nie zusammenfallen. Im günstigsten Fall, wenn n = m und die Intervalle beider Güter die gleiche Länge besitzen, haben wir wie im einfachen Rabattmodell n-1 Sprungstellen. Im allgemeinen sind aber in diesem Modell mehr Randwerte zu untersuchen als im einfachen Rabattmodell.

   Wie findet man aber die Sprungstellen und welche Preiskombinationen gelten an diesen Sprungstellen? Diese Fragen sollen anhand eines Beispiels erläutert werden. Es gelte für <u>Gut 1</u>

$$p_{11} \text{ für } 1 \leq q_1 < 100$$
$$p_{12} \text{ für } 100 \leq q_1 < 500$$
$$p_{13} \text{ für } q_1 \geq 500$$

   und für <u>Gut 2</u>

$$p_{21} \text{ für } 1 \leq q_2 < 150$$
$$p_{22} \text{ für } 150 \leq q_2 < 400$$
$$p_{23} \text{ für } q_2 \geq 400$$

   Weiter gelte

$$r_1 = 2r_2 \quad \text{bzw.} \quad r_2 = \frac{1}{2} r_1$$

   Daraus folgt

$$\frac{r_1}{r_1+r_2} = \frac{2}{3} \quad \text{bzw.} \quad \frac{r_2}{r_1+r_2} = \frac{1}{3}$$

In diesem Verhältnis wird q^J auf q_1^J und q_2^J aufgeteilt. Um die Sprungstelle zu finden, müssen die Mindestmengen der Preisklassen gerade mit dem zugehörigen reziproken Wert der obigen Verhältnisse multipliziert werden. Am Beispiel illustriert ergibt das:

p_{12} gilt von $q^J = \frac{3}{2}$ 1oo = 15o ab, denn $\frac{2}{3}$ 15o = 1oo = q_{12}^J (Untergrenze des 2.Intervalls von Gut 1). q_2^J ist an der Stelle q^J = 15o gleich 5o, nämlich $\frac{1}{3}$ 15o. Es gilt daher p_{21}. Hinter der Sprungstelle q^J = 15o gilt daher die Preiskombination (p_{12},p_{21}).

Ähnlich gilt: p_{22} von q^J = 3.15o = 45o ab, denn $\frac{1}{3}$ 45o = 15o = q_{22}^J(Untergrenze des Intervalls von Gut 2). q_1^J ist an der Stelle q^J = 45o gleich 3oo, nämlich $\frac{2}{3}$ 45o. Es gilt daher p_{12}. Hinter der Sprungstelle q^J = 45o gilt die Preiskombination (p_{12},p_{22}).

Weitere Sprungstellen in diesem Beispiel sind q^J = 75o, mit q_{13}^J (Untergrenze des 3.Intervalls von Gut 1) und der Preiskombination (p_{13},p_{22}) und q^J = 12oo, mit q_{23}^J (Untergrenze des 3.Intervalls von Gut 2) und der Preiskombination (p_{13},p_{23}). Der Funktionsverlauf beginnt in diesem Beispiel bei q^J = 3 mit (p_{11},p_{21}).

Wir haben also Sprungstellen (mit den zugehörigen Preiskombinationen) bei

q^J = 15o mit (p_{12},p_{21})
q^J = 45o mit (p_{12},p_{22})
q^J = 75o mit (p_{13},p_{22})
q^J = 12oo mit (p_{13},p_{23})

Nachdem gezeigt wurde, wie die Randwerte und die zugehörigen Preise gefunden werden, können die Kosten an diesen Punkten berechnet werden. Ausgewählt wird das q_o^J mit den geringsten Kosten, das Randminimum.

2. Ähnlich wie im einfachen Rabattmodell werden zunächst die Restriktionen bezüglich der Beschränkung der Rabatte auf bestimmte Intervalle außer acht gelassen. Nach der aus (82) hergeleiteten Beziehung

$$q_o^J = (r_1+r_2)\sqrt{\frac{2k_{bf}}{r_1c_1p_{1i}+r_2c_2p_{2j}}} \qquad (83)$$

müssen maximal n + m - 1 (da das letzte Intervall bei beiden Gütern offen ist und daher von der letzten Sprungstelle an für beide gemeinsam gilt) "optimale" Bestellmengen q_o^J errechnet werden. Für die p_{1i} und p_{2j} werden die oben aufgeführten Preiskombinationen und (p_{11},p_{21}) für das erste Intervall beider Güter eingesetzt. Die errechneten q_o^J-Werte werden daraufhin untersucht, ob sie zulässige Werte sind, d.h. ob die daraus sich ergebenden q_{1o}^J- und q_{2o}^J-Werte in die Intervalle fallen, für die die eingesetzt (p_{1i},p_{2j})-Kombination gilt. Aus den zulässigen Werten wird der kostenminimale ausgewählt. An dieser Stelle ist das Minimum Minimorum der stetigen Bereiche der Gesamtlagerkostenfunktion unseres Modells.

3. Im dritten Schritt wird ein Vergleich vorgenommen zwischen den Kosten des Randminimums und den Kosten des Minimum Minimorums im stetigen Bereich. Der Vergleich bringt dann die endgültige optimale Entscheidung.

5.3. Untersuchung der Vorteilhaftigkeit der Joint-Ordering-Politik im Rabattmodell.

Da die Lösung des Rabattmodells nicht direkt durch eine Formel, sondern nur über ein iteratives Verfahren gewonnen werden kann, ist es nicht möglich, ohne weiteres zu sagen, ob die Joint-Ordering-Politik vorteilhaft ist.

Lediglich für einen Spezialfall kann eine direkte Aussage gemacht werden. Nehmen wir an, zwei Güter haben gleiche Rabattintervalle, gleiche Preise in den Intervallen; ist $c_1 = c_2$, so sind auch die Lagerhaltungskosten k_1 für beide gleich. Schließlich sollen auch noch die Nachfrage-

raten für beide gleich sein. (Praktisch handelt es sich dann kostenmäßig gesehen um das gleiche Gut)
Nach (77) ergibt sich für die isolierte Betrachtungsweise für Gut 1

$$K_1(q_1) = \frac{1}{2} c_1 p_{1i} q_1 + \frac{k_{bf} r_1}{q_1} + r_1 p_1 \qquad (84)$$

mit $q_{1i} \leqq q_1 < q_{1,i+1}$

Die gleiche Funktion gilt unter den getroffenen Annahmen auch für Gut 2. Die optimale Bestellmenge q_o ist für beide gleich. Die Kosten insgesamt sind also

$$K_{o,1+2} = 2(\frac{1}{2} c_1 p_{1i} q_o + \frac{k_{bf} r_1}{q_o} + r_1 p_1) \qquad (85)$$

mit $q_{1i} \leqq q_o < q_{1,i+1}$

Da $r_1 = r_2$, folgt $r_1/r_1+r_2 = r_2/r_1+r_2 = 1/2$.

Das hat auf den Verlauf der Kostenfunktion der Joint-Ordering-Politik folgende Auswirkung: Die Sprungstellen erhalten gegenüber den Ausgangswerten einen doppelt so hohen Wert. An einem Beispiel illustriert:

$p_{11} = p_{21}$ für $1 \leqq q_{1,2} < 100$
$p_{12} = p_{22}$ für $100 \leqq q_{1,2} < 500$
$p_{13} = p_{23}$ für $q_{1,2} \geqq 500$

Für die Sprungstellen gilt nun:

$p_{12} = p_{22}$ für $q^J = 2.100 = 200$, denn $\frac{1}{2}q^J = q^J_{12} = q^J_{22}$ = 100 (Untergrenze des 2.Intervalls von Gut 1 und Gut 2).

$p_{13} = p_{23}$ für $q^J = 2.500 = 1000$, denn $\frac{1}{2}q^J = q^J_{13} = q^J_{23}$ = 500 (Untergrenze des 3.Intervalls von Gut 1 und Gut 2).

In der isolierten Betrachtungsweise hatten wir Sprungstellen (mit den zugehörigen Preiskombinationen) bei

$q_{12} = q_{22} = 100$ mit (p_{12}, p_{22})

$q_{13} = q_{23} = 500$ mit (p_{13}, p_{23}).

Stattdessen gilt für die Joint-Ordering-Politik

$q^J = 200$ mit (p_{12}, p_{22})

$q^J = 1000$ mit (p_{13}, p_{23})

und die Gesamtlagerkostenfunktion lautet in diesem Spezialfall

$$K^J(q^J) = \frac{1}{2} c_1 p_{1i} q^J + 2 \frac{k_{bf} r_1}{q^J} + 2 r_1 p_{1i} \qquad (86)$$

$$\text{mit } q_{1,2,i} \leq q^J \frac{r_1}{r_1+r_2} = q^J \frac{r_2}{r_1+r_2} = \frac{1}{2} q^J = q_o < q_{1,2,i+1}$$

(86) und (85) stimmen in ihrem 2. und 3. Term überein, aber in (86) haben wir nur $\frac{1}{2} c_1 p_{1i} q^J$, während in (85) $c_1 p_{1i} q_o$ gilt. Der Kurvenverlauf von (86) wird stets unterhalb von (85) liegen, eine natürliche Folge davon, daß die q^J-Achse um den Faktor 2 gestreckt wurde.

Für diesen Spezialfall konnte gezeigt werden, daß durch das weniger häufige Anfallen von k_{bf}-Bestellkosten bei der Bestellung von q^J-Mengeneinheiten in der Joint-Ordering-Politik gegenüber der isolierten Bestellpolitik Kostenvorteile entstehen. Diese Tendenz, so kann vermutet werden, wird auch für den allgemeinen Fall gelten. Anhand der geschilderten Lösungsverfahren kann stets für beliebige Zahlenwerte die Untersuchung der Vorteilhaftigkeit der beiden Bestellpolitiken vorgenommen werden.

8. Joint-Ordering-Politik, angewandt auf ein Modell mit einer Lagerkapazitätsrestriktion.

6.1. Darstellung eines Lagerhaltungsmodells mit einer Kapazitätsrestriktion.[13)]

Bisher wurde stets angenommen, daß die Lagerkapazität

13) Vgl. H.-J.Schrader, Die Theorie der Vorratsplanung,...

ausreiche, um die errechneten Bestellmengen auch tatsächlich aufnehmen zu können. Diese Annahme wird jetzt fallen gelassen, und die Lagerkapazität als Restriktion explizit berücksichtigt. Im übrigen gelten die Annahmen des Elementarmodells.

Es sollen n verschiedene Güter gelagert werden. Das Gut i benötige je Mengeneinheit w_i Raumeinheiten; die insgesamt verfügbare Lagerkapazität betrage W Raumeinheiten.

Die Kostenfunktion der isolierten Bestellpolitik lautet für die n Güter (vgl. (13)):

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_i}{2} k_{1i} + \frac{k_{bi} r_i}{q_i}\right) \qquad i = 1,2,\ldots,n \quad (87)$$

Die hieraus errechneten q_{oi} können, wegen der Knappheit des Faktors Lagerraum, zu Lagerbeständen führen, welche die verfügbaren Lagerkapazitäten übersteigen mögen.

Der für das Gut i benötigte Lagerraum werde durch den Anfangsbestand q_i (Bestellmenge) bestimmt. Der insgesamt benötigte Lagerraum beträgt somit

$$\sum_{i=1}^{n} w_i q_i \qquad i = 1,2,\ldots,n \quad (88)$$

Das Problem ist nun, Werte für die q_{oi} zu finden, welche die Kostenfunktion (87) unter der Nebenbedingung

$$W - \sum_{i=1}^{n} w_i q_i = 0 \quad (89)$$

minimieren.

Man minimiert eine solche Funktion unter einer Nebenbedingung in Gleichungsform nach der Theorie der Lagrange' Multiplikatoren. Zu diesem Zwecke wird eine Lagrange-

....a.a.O., S.66-69; Holt, Modigliani, Muth und Simon, Planning Production, ... a.a.O., S.189-191; E.Naddor, Inventory Systems, ... a.a.O., S.75-76; Naddor hat ein Fehlmengenmodell seiner Untersuchung zugrundegelegt; Hadley und Whitin, Analysis of Inventory Systems, ... a.a.O., S. 54-61; Churchman-Ackoff-Arnoff, ...a.a.O. S.235-252.

Funktion L definiert:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_i}{2} k_{1i} + \frac{k_{bi} r_i}{q_i} \right) + \lambda \left(W - \sum_{i=1}^{n} w_i q_i \right) \qquad (90)$$

λ ist der sogenannte Lagrange'sche Multiplikator. Wegen (89) ist $\lambda(W - \Sigma w_i q_i)$ stets Null. Der Wert der Kostenfunktion wird durch diesen Ausdruck nicht verändert.

Um die unter der Nebenbedingung optimalen Bestellmengen q_{oi} zu bestimmen, bildet man die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion nach λ und q_i und setzt diese gleich Null.

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = W - \sum_{i=1}^{n} w_i q_i = 0 \qquad (91)$$

$$\frac{\delta L}{\delta q_i} = \frac{k_{1i}}{2} - \frac{k_{bi} r_i}{q_i^2} - \lambda w_i = 0 \qquad (92)$$

Aus (92) folgt

$$q_{oi} = \sqrt{\frac{2 k_{bi} r_i}{k_{1i} - 2\lambda w_i}} \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (93)$$

Das System der Gleichungen (91) und (93) ist zu lösen, um die optimalen Bestellmengen q_{oi} zu bestimmen. Es hat n + 1 Unbekannte (q_i,λ) und besteht aus n + 1 Gleichungen. Praktisch sucht man den Wert von λ, für den die entsprechenden q_i die Nebenbedingung (89) erfüllen.[19] Wenn die Lagerkapazitäten knapp sind, müssen die unter Berücksichtigung der Restriktion sich ergebenden Bestellmengen kleiner sein als bei ausreichender Lagerkapazität. Es gilt daher $\lambda < 0$.

6.2. Die Joint-Ordering-Politik für ein Lagerhaltungsmodell mit Kapazitätsrestriktion.

Mit dem System der Gleichungen (91) und (93) ist der

19) Einige graphische und analytische Lösungsmethoden werden bei Holt, Modigliani, Muth und Simon, Planning Production,... a.a.O.,S.191-199, beschrieben.

Lösungsweg für die isolierte Bestellpolitik gegeben. Wie sieht aber der Lösungsweg für die Joint-Ordering-Politik aus?

Bei der Joint-Ordering-Politik wird, wie wir von dem Elementarmodell her wissen, ein q^J für die Sammelbestellung errechnet. Dieses q^J ergibt, multipliziert mit dem Anteil, den ein Gut i an der Gesamtnachfrage hat, die Höhe der Bestellmenge des Gutes i bei der Sammelbestellung an, d.h.

$$q_i = q^J \frac{r_i}{\sum_i r_i} \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad (94)$$

Da alle Güter in einem einheitlichen Bestellrhythmus zusammen bestellt werden, fallen die Beschaffungskosten nur einmal an. Die Kostenfunktion der Joint-Ordering-Politik lautet für n Güter demnach (vgl. (18)):

$$K^J = \frac{q^J}{2} \sum_{i=1}^{n} k_{1i} \frac{r_i}{\sum_i r_i} + \frac{k_b \sum_i r_i}{q^J} \qquad (95)$$

Aus (88), (89) und (94) erhält man für die Kapazitätsbeschränkung folgenden Ausdruck:

$$W - q^J \sum_i w_i \frac{r_i}{\sum_i r_i} = 0 \qquad (96)$$

Da wir q^J als ein einziges Sammelbestellgut mit einer, aufgrund der Verhältnisse der Nachfrageraten der einzelnen Güter fest vorgegebenen Zusammensetzung, betrachten können, gibt es bei der Joint-Ordering-Politik im Modell mit Kapazitätsrestriktionen nur zwei Alternativen:

a) Für das nach (95) errechnete q^J reichen die Kapazitäten aus. Dann ergibt (95) unsere Lösung.
b) Reichen die Kapazitäten für das nach (95) errechnete q^J nicht aus, so wird q^J aus (96) bestimmt.

Zum Vergleich der Joint-Ordering-Politik mit der separaten Bestellpolitik in unserm Modell mit einer Lagerkapazitätsbeschränkung nur kurz einige Bemerkungen. Da, wie schon früher gezeigt, q_o^J stets kleiner als die Summe der q_{oi} ist, ist die Spitzenbeanspruchung der Lagerkapazität bei der Joint-Ordering-Politik geringer als bei der separaten Bestellpolitik. Die Kapazitätsrestriktion macht sich daher bei der Joint-Ordering-Politik weniger bemerkbar als bei der separaten Bestellpolitik. Andererseits tritt die Spitzenbelastung der Kapazität bei der separaten Bestellpolitik, aufgrund der unterschiedlichen Bestellintervalle der einzelnen Güter, seltener auf. Man könnte in diesem Fall daher daran denken, die Kapazität nicht auf die Spitzenbelastung abzustellen, sondern zusätzliche Lagerkapazitäten kurzfristig zu mieten. Diese Fragestellung entspricht aber nicht der obigen Modellsituation und soll auch nicht weiter untersucht werden. Welche Bestellpolitik in unserer Modellsituation am kostengünstigsten ist, muß im Einzelfall anhand der konkreten Daten untersucht werden.

Teil III. DAS JOINT-ORDERING-PROBLEM FÜR DETERMINISTISCHE LAGERHALTUNGSSYSTEME BEI ABHÄNGIGKEIT DER BESCHAFFUNGSKOSTEN VON DER ZAHL VERSCHIEDENER ZU EINER BESTELLUNG ZUSAMMENGEFASSTER GÜTER.

1. Joint-Ordering-Politik, angewandt auf das klassische Bestellmengenmodell, bei Abhängigkeit der Beschaffungskosten von der Zahl verschiedener zu einer Bestellung zusammengefaßter Güter.[20)]

1.1. Ableitung der Kostenfunktionen für die separate Bestellpolitik und die Joint-Ordering-Politik.

Im Abschnitt (3.1.) von Teil II wurden die Vorteile der Joint-Ordering-Politik für das Elementarmodell aufgezeigt. Für alle n Güter wurde ein gemeinsames Bestellintervall t^J errechnet. Nach jeweils t^J Zeiteinheiten wurden alle n Güter, zusammengefaßt zu einer Sammelbestellung, gemeinsam miteinander bestellt. Die Beschaffungskosten k_b traten nur einmal pro Sammelbestellung auf. Jedes einzelne Gut trug also nur 1/n der Beschaffungskosten. Die relativen Kostenersparnisse der Joint-Ordering-Politik gegenüber der separaten Bestellpolitik betrugen maximal $(1 - 1/\sqrt{n}).100$ % (Vgl. (35)). Das Bestellintervall t^J der Joint-Ordering-Politik war stets kleiner als irgendein Bestellintervall t_i bei der separaten Bestellpolitik.

Für die Untersuchungen von Teil III wird jetzt angenommen, daß die Beschaffungskosten k_b nicht mehr konstant sind, sondern vielmehr von der Anzahl verschiedener zu einer Bestellung zusammengefaßter Güter abhängen. Es soll gelten:

$$k_{bi} = k_{bfi} + k_{bvi} \qquad (97)$$

---

20) Zum folgenden vgl. Balintfy, Joseph L., "On a Basic Class of Multi-item Inventory Problems, in: Management Science, Bd. 1o, 1964, S.287-297, hier bes. S.288-291. Die Ableitungen folgen weitgehend den dortigen Ableitungen. Auch die Spezialfälle 1-3 sind von Balintfy übernommen. Änderungen ergeben sich nur durch die Anpassung an meine Nomenklatur, die teilweise etwas allgemeiner als die von Balintfy gehalten ist.

In (97) bedeuten k_{bf} die eigentlichen bestellfixen Kosten. Diese können bei der Joint-Ordering-Politik weitgehend eingespart werden. Die variablen Beschaffungskosten k_{bv} fallen jedoch auch bei der Joint-Ordering-Politik für jedes Gut an.

Die Gesamtlagerkostenfunktion eines Gutes i bei separater Bestellpolitik lautet, bezogen auf das Bestellintervall t_i, für das klassische Bestellmengenmodell unter der neuen Annahme über die Beschaffungskosten

$$K_i = \frac{1}{2} k_{li} r_i t_i + \frac{k_{bfi}}{t_i} + \frac{k_{bvi}}{t_i} \qquad (98)$$

Die Gesamtlagerkostenfunktion für ein Lagerhaltungssystem von n verschiedenen Gütern lautet dann für die separate Bestellpolitik

$$K_I = \sum_{i=1}^{n} K_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} k_{li} r_i t_i + \frac{k_{bfi}}{t_i} + \frac{k_{bvi}}{t_i} \right) \qquad (99)$$

(99) wird minimiert, wenn für jedes Gut dessen optimales Bestellintervall und die entsprechende optimale Bestellmenge errechnet wird. Aus (98) ergibt sich

$$t_{oi} = \sqrt{\frac{2(k_{bfi} + k_{bvi})}{k_{li} r_i}} \qquad (100)$$

für das optimale Bestellintervall eines Gutes i und

$$q_{oi} = r_i t_{oi} = \sqrt{\frac{2 r_i (k_{bfi} + k_{bvi})}{k_{li}}} \qquad (101)$$

für die optimale Bestellmenge.

Für das Lagerhaltungssystem insgesamt ergeben sich für die separate Bestellpolitik als minimale Kosten

$$K_{oI} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2(k_{bfi} + k_{bvi})\, k_{li} r_i} \qquad (102a)$$

oder

$$K_{oI} = 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{k_{bfi} + k_{bvi}}{t_{oi}} \qquad (1o2b)$$

Bei der Joint-Ordering-Politik wird für alle n Güter ein gemeinsames Bestellintervall t^J bestimmt. Die Kostenfunktion lautet für diese Bestellpolitik

$$K^J = \frac{1}{2} t^J \sum_{i=1}^{n} k_{li} r_i + \frac{\sum_{i=1}^{n} k_{bvi}}{t^J} + \frac{k^J_{bf}}{t^J} \qquad (103)$$

k^J_{bf} sind die bestellfixen Kosten, die bei der Joint-Ordering-Politik anfallen.

Aus (103) erhält man für das optimale Bestellintervall die Beziehung

$$t^J_o = \sqrt{\frac{2(k^J_{bf} + \sum_{i=1}^{n} k_{bvi})}{\sum_{i=1}^{n} k_{li} r_i}} \qquad (104)$$

und für die minimalen Kosten der Joint-Ordering-Politik gilt

$$K^J_o = \sqrt{2(k^J_{bf} + \sum_{i=1}^{n} k_{bvi}) \sum_{i=1}^{n} k_{li} r_i} \qquad (105a)$$

oder

$$K^J_o = \frac{2(k^J_{bf} + \sum_{i=1}^{n} k_{bvi})}{t^J_o} \qquad (105b)$$

Ähnlich wie im Abschnitt (3.1.) von Teil II soll eine Beziehung für die relativen Kostenersparnisse E der Joint-Ordering-Politik gegenüber der separaten Bestellpolitik ermittelt werden. Ganz allgemein definieren wir

$$E = (1 - \frac{K^J_o}{K_{oI}}) \; 1oo \; \% \qquad (106)$$

Welche Beziehungen für E bei Zugrundelegen des klassischen Bestellmengenmodells gelten, soll für einige Spezialfälle untersucht werden.

1.2. Spezialfall 1.

In diesem Spezialfall nehmen wir an:

(1) $k_{bvi} = k_{bvj} = k_{bv}$

(2) $k_{bfi} = k_{bfj} = k_{bf} = k_{bf}^J$

(3) $k_{li}r_i = k_{lj}r_j = k_l r$

D.h. die proportionalen Beschaffungskosten, die bestellfixen Kosten und das Produkt aus Lagerhaltungskostensatz und Nachfragerate sind für alle Güter gleich. Auch die bestellfixen Kosten der Joint-Ordering-Politik sind gleich denen, die bei der separaten Bestellpolitik für jedes Gut anfallen.

Die separate Bestellpolitik ergibt für diesen Spezialfall für jedes Gut das gleiche Intervall als optimales Bestellintervall (d.h. $t_{oi} = t_{oj} = t_o$). Für die minimalen Gesamtlagerkosten der separaten Bestellpolitik erhält man nach (102)

$$K_{oI} = n\sqrt{2(k_{bf} + k_{bv})\, k_l r} \qquad (107a)$$

oder

$$K_{oI} = \frac{2n(k_{bf} + k_{bv})}{t_o} \qquad (107b)$$

Für die Joint-Ordering-Politik erhält man jedoch nach (105) für die minimalen Gesamtlagerkosten

$$K_o^J = \sqrt{2n(k_{bf} + nk_{bv})\, k_l r} \qquad (108a)$$

oder

$$K_o^J = \frac{2(k_{bf} + nk_{bv})}{t_o^J} \qquad (108b)$$

Aus (108) und (107) läßt sich jetzt E bestimmen zu

$$E = \left(1 - \sqrt{\frac{(k_{bf} + nk_{bv})}{n(k_{bf} + k_{bv})}}\right) 100\ \% \qquad (109a)$$

oder

$$E = \left(1 - \sqrt{\frac{1 + nd}{n(1 + d)}}\right) 100\ \% \qquad (109b)$$

wobei $d = k_{bv}/k_{bf}$.

Es kann nun gezeigt werden:

1. Ist $k_{bv} = 0$, d.h. die proportionalen Beschaffungskosten spielen keine Rolle (die Situation in Teil II), dann ist auch $d = 0$ und wir erhalten für E die Beziehung

$$E = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) 100\ \% \qquad (35)$$

d.h. unsere schon früher hergeleitete Beziehung für die maximalen relativen Kostenersparnisse der Joint-Ordering-Politik bei n Gütern.

2. Da eine Joint-Ordering-Politik nur für $n \geq 2$ Güter sinnvoll ist, gilt stets

$$\sqrt{\frac{1 + nd}{n(1 + d)}} < 1$$

d.h. die Joint-Ordering-Politik ist in diesem Spezialfall stets der separaten Bestellpolitik vorzuziehen.

1.3. Spezialfall 2.

Es gelten weiterhin die Annahmen

(1) $k_{bvi} = k_{bvj} = k_{bv}$

(2) $k_{bfi} = k_{bfj} = k_{bf} = k_{bf}^{J}$

Jedoch gilt jetzt anstatt (3) des Spezialfalls 1 die realistischere Annahme

$$(3)\quad k_{1i}r_i \neq k_{1j}r_j$$

Bei separater Bestellpolitik ergibt sich somit für jedes Gut ein verschiedenes Bestellintervall t_i. Aus (102) erhält man jetzt als minimale Gesamtlagerkosten der separaten Bestellpolitik

$$K_{oI} = \sqrt{2(k_{bf} + k_{bv})} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{k_{1i}r_i} \qquad (110a)$$

oder

$$K_{oI} = 2(k_{bf} + k_{bv}) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_{oi}} \qquad (110b)$$

Für die Joint-Ordering-Politik ergeben sich nach (105) als minimale Gesamtlagerkosten

$$K_o^J = \sqrt{2(k_{bf} + nk_{bv}) \sum_{i=1}^{n} k_{1i}r_i} \qquad (111a)$$

oder

$$K_o^J = \frac{2(k_{bf} + nk_{bv})}{t_o^J} \qquad (111b)$$

wobei jetzt für t_o^J gilt:

$$t_o^J = \sqrt{\frac{2(k_{bf} + nk_{bv})}{\sum_{i=1}^{n} k_{1i}r_i}} \qquad (112)$$

Für die verschiedenen t_i der separaten Bestellpolitik gilt:

$$t_{oi} = \sqrt{\frac{2(k_{bf} + k_{bv})}{k_{1i}r_i}} \qquad (113)$$

Aus (110) und (111) erhält man

$$\frac{K_o^J}{K_{oI}} = \frac{\sqrt{(k_{bf} + nk_{bv}) \sum_{i=1}^{n} k_{li} r_i}}{\sqrt{(k_{bf} + k_{bv})} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{k_{li} r_i}} \qquad (114)$$

Der Beziehung (114) läßt sich durch einen Trick noch eine anschaulichere Bedeutung geben.

Das harmonische Mittel t_{oi}^+ ist definiert als

$$t_{oi}^+ = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_{oi}}} \qquad (115)$$

Wird dieses t_{oi}^+ jetzt durch t_o^J dividiert, so erhalten wir

$$\frac{t_{oi}^+}{t_o^J} = \frac{n\sqrt{(k_{bf} + k_{bv}) \sum_{i=1}^{n} k_{li} r_i}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(k_{bf} + nk_{bv}) k_{li} r_i}} \qquad (116)$$

Multiplizieren wir nun t_{oi}^+/t_o^J mit

$$b = \frac{k_{bf} + nk_{bv}}{n(k_{bf} + k_{bv})} \qquad (117)$$

so erhalten wir wieder die Beziehung (114). Für den Spezialfall 2 lautet demnach die Beziehung E:

$$E = (1 - \frac{k_{bf} + nk_{bv}}{n(k_{bf} + k_{bv})} \frac{t_{oi}^+}{t_o^J}) \; 100 \; \% \qquad (118a)$$

oder

$$E = (1 - \frac{1 + nd}{n(1 + d)} \frac{t_{oi}^+}{t_o^J}) \; 100 \; \% \qquad (118b)$$

wobei wieder $d = k_{bv}/k_{bf}$.

Die Vorteilhaftigkeit der Joint-Ordering-Politik für ein Lager mit n Gütern hängt jetzt nicht mehr allein von dem Wert von d ab, sondern auch von dem Verhältnis zwischen dem harmonischen Mittel der t_{oi} und dem t_o^J. D.h. davon, wie stark die einzelnen t_{oi} voneinander abweichen. Sind diese Abweichungen stark, so ist der Wert von t_{oi}^+ groß. Das hat ceteris paribus einen ungünstigen Effekt auf die Vorteilhaftigkeit der Joint-Ordering-Politik. Dieses Ergebnis stimmt mit den Ergebnissen des Abschnitts (3.1.) von Teil II überein, wo gezeigt wurde, daß die Divergenz der Nachfrageraten bzw. der Lagerhaltungskostensätze bei verschiedenen Gütern einen ungünstigen Einfluß auf die relativen Kostenersparnisse der Joint-Ordering-Politik hat. Während dort die Joint-Ordering-Politik dennoch stets vorteilhaft blieb, kann hier die separate Bestellpolitik durchaus wieder vorteilhaft werden. Damit die Joint-Ordering-Politik vorteilhaft bleibt, muß in (118)

$$\frac{1 + nd}{n(1 + d)} \cdot \frac{t_{oi}^+}{t_o^J} < 1 \qquad (118c)$$

sein. Oder anders ausgedrückt:

$$\frac{1 + nd}{n(1 + d)} < \frac{t_o^J}{t_{oi}^+} \qquad (118d)$$

Ist jedoch

$$\frac{1 + nd}{n(1 + d)} \geq \frac{t_o^J}{t_{oi}^+}$$

dann wird allgemein die separate Bestellpolitik vorgezogen. Aber selbst in diesem Fall kann es günstiger sein, die Joint-Ordering-Politik auf Untergruppen von k Gütern anzuwenden. Wie diese Untergruppen zu bestimmen sind, soll im folgenden untersucht werden.

1.4. Bedingungen für eine disaggregierte Joint-Ordering-Politik.

Es besteht eine allgemeine Vermutung, daß man weitere Kostenersparnisse erzielen kann, wenn man Güter, deren mit dem zugehörigen Lagerhaltungskostensatz bewertete Nachfrage $k_{li}r_i$ gering ist, nur in Vielfachen des Intervalls t^J bestellt. Denn die variablen Beschaffungskosten k_{bvi} hängen ja von der Zahl verschiedener zu einer Sammelbestellung zusammengefaßter Güter ab. Es kann also sinnvoll sein, ein Gut aus der Joint-Ordering-Politik auszuklammern und separat zu betrachten, oder Gütergruppen zu bilden und diese dann gemäß der Joint-Ordering-Politik zu behandeln. Diese und ähnliche Fragen sind Gegenstand der "disaggregierten" Joint-Ordering-Politik.

1.4.1. Bedingungen für das Ausklammern eines Gutes aus der Joint-Ordering-Politik.[21)]

Den folgenden Untersuchungen liegen die Annahmen des Spezialfalls 2 zugrunde. Während im Elementarmodell des Abschnitts (3.1.) von Teil II das t^J kleiner ist als jedes t_i, kann es, wie aus dem Vergleich von (112) und (113) hervorgeht, hier ein t_i geben, das kleiner als t^J ist. Welche Beziehung muß nun gelten, damit dies der Fall ist?

Soll $t_i < t^J$ sein, so erhält man aus (112) und (113) nach einigen Vereinfachungen

---

21) Die folgenden Ableitungen stützen sich auf Starr und Miller, Inventory Control, ... a.a.O., S. 1o5-1o9. Starr und Miller verwenden bei ihren Ableitungen die Preise der Güter und zugehörige Konstanten c_i, mit deren Hilfe die Lagerhaltungskosten ausgedrückt werden. Im Gegensatz dazu verwende ich die Lagerhaltungskostensätze k_{li} direkt. Weiterhin wird auf einige Unklarheiten oder Unvollständigkeiten an entsprechender Stelle hingewiesen.

$$\frac{k_{bf} + k_{bv}}{k_{bf} + nk_{bv}} < \frac{k_{li}r_i}{\sum_{i=1}^{n} k_{li}r_i} \qquad (119a)$$

oder

$$\frac{1 + d}{1 + nd} < \frac{k_{li}r_i}{\sum_{i=1}^{n} k_{li}r_i} \qquad (119b)$$

wobei wieder $d = k_{bv}/k_{bf}$.

Ist also der mit seinem Lagerhaltungskostensatz bewertete Anteil der Nachfrage eines Gutes i an der mit den entsprechenden Lagerkostensätzen bewerteten Gesamtnachfrage aller Güter (rechte Seite von (119)) größer als die linke Seite von (119), so ist das t_i, das sich bei separater Bestellpolitik ergibt kleiner als das t^J der Joint-Ordering-Politik.

Wie groß der Anteil eines Gutes in Prozent sein muß, soll in Tabelle IV für einige Werte von n und d gezeigt werden.

Tabelle IV

$$a = \frac{1 + d}{1 + nd} \cdot 100\ \%$$

n \ d	o,o1	o,o5	o,1o	o,2o	o,5o	1	5	1o
2	99,o1	95,45	91,66	85,71	75,oo	66,67	54,54	52,38
5	96,19	84,oo	73,33	6o,oo	42,85	33,33	23,o7	21,56
1o	91,81	7o,oo	55,oo	4o,oo	25,oo	18,18	11,76	1o,89
2o	84,16	52,5o	36,66	24,oo	13,63	9,52	5,94	5,47
5o	67,33	3o,oo	18,33	1o,9o	5,76	3,92	2,39	2,19
1oo	5o,5o	17,5o	1o,oo	5,71	2,94	1,98	1,19	1,o9

Ein kleiner Wert von d bedeutet, daß k_{bv} im Vergleich zu k_{bf} unbedeutend ist. Ist dies der Fall, dann muß auf ein Gut i schon ein sehr hoher Anteil fallen, wenn sein

t_i kleiner als t^J sein soll (z.B. für d = o,o1 und 1oo = n muß auf das eine Gut 5o,5o % der mit den Lagerhaltungskostensätzen bewerteten Gesamtnachfrage entfallen). Für d = 0 muß der Anteil 1oo % betragen. Eine Ausklammerung ist dann nicht sinnvoll. Dies entspricht den Ergebnissen von Teil II, denn aus d = 0 folgt $k_{bv} = 0$, d.h. die variablen Beschaffungskosten spielen keine Rolle. Das ist aber die Situation in Teil II. Je mehr jedoch k_{bv} eine Rolle spielt, d.h. je größer d wird, desto geringer braucht der Anteil des Gutes i nur noch zu sein. Mit wachsendem n fällt der Anteil recht schnell. Wie eine Grenzbetrachtung von (119b) für $d \to \infty$ zeigt, muß der Anteil jedoch stets größer als 1/n.1oo % sein.

Die Berücksichtigung von k_{bv} zeigt nun, daß die Anwendung von t^J auf alle Güter die Gesamtlagerkosten dann nicht minimiert, wenn ein Gut mit hohem Anteil an der mit den Lagerhaltungskostensätzen bewerteten Gesamtnachfrage vorhanden ist.

In (119b) haben wir jedoch nur eine Bedingung gefunden, die angibt, wie hoch der Anteil eines Gutes i an der mit den Lagerhaltungskostensätzen bewerteten Gesamtnachfrage sein muß, damit dessen t_i bei separater Bestellpolitik kleiner ist als das t^J der Joint-Ordering-Politik. Damit ist aber noch nicht gesagt, ob bei diesem Anteil eine isolierte Bestellung des Gutes zu einer Verminderung der Gesamtlagerkosten führt. Wie hoch hierfür der Anteil sein muß, kann nicht aus dem Vergleich von (112) und (113), sondern nur aus einem Vergleich der Kostenbeziehungen hergeleitet werden. Das soll jetzt erfolgen.

Wir gehen von einem Gut A aus, das einen hohen Anteil a, $0 < a < 1$, an den Lagerhaltungskosten der ganzen Gruppe hat. Den übrigen (n-1) Gütern der Gruppe verbleibt demnach noch ein Anteil von (1 - a). Für Gut A wird jetzt gemäß der separaten Bestellpolitik einmal

$$t_A = \sqrt{\frac{2(k_{bf} + k_{bv})}{a \sum_{i=1}^{n} k_{li} r_i}} \tag{120}$$

und weiterhin

$$K_A = \sqrt{2(k_{bf} + k_{bv})\, a \sum_{i=1}^{n} k_{li} r_i} \tag{121}$$

bestimmt.

Für die restlichen (n-1) Güter wird gemäß der Joint-Ordering-Politik einmal das gemeinsame

$$t_B^J = \sqrt{\frac{2\left[k_{bf} + (n-1)k_{bv}\right]}{(1-a) \sum_{i=1}^{n} k_{li} r_i}} \tag{122}$$

und

$$K_B^J = \sqrt{2\left[k_{bf} + (n-1)k_{bv}\right](1-a) \sum_{i=1}^{n} k_{li} r_i} \tag{123}$$

bestimmt.

Eine Aufteilung, wie sie hier vorgenommen wurde, ist nur dann günstiger als die Joint-Ordering-Politik ohne Ausklammerung des Gutes A, wenn gilt:

$$K_A + K_B^J < K_o^J \tag{124}$$

Nach Einsetzen von (121), (123) und (111) und einigen Vereinfachungen erhält man

$$\sqrt{(k_{bf} + k_{bv})\, a} + \sqrt{\left[k_{bf} + (n-1)k_{bv}\right](1-a)} < \sqrt{k_{bf} + nk_{bv}} \tag{125a}$$

oder

$$\sqrt{(1+d)a} + \sqrt{\left[1+(n-1)d\right](1-a)} < \sqrt{1+nd} \tag{125b}$$

wobei wieder $d = k_{bv}/k_{bf}$.

Durch Quadrieren von (125b) kommt man zunächst zu

$$2\sqrt{(1+d)a[1+(n-1)d](1-a)} < d[a(n-2)+1]$$

Die rechte Seite dieser Beziehung muß auf jeden Fall positiv sein, damit man durch Radizieren wieder zu (125b) gelangt. Dies ist der Fall, wenn $n \geq 2$. Diese Bedingung ist in der Joint-Ordering-Situation jedoch stets gegeben.

Obige Beziehung wird nochmals quadriert. Wir gelangen zu der quadratischen Ungleichung

$$a^2(2+nd)^2 - a(2nd^2+4nd+4) + d^2 > 0 \qquad (126)$$

Diese quadratische Ungleichung ist erfüllt, wenn gilt:

$$a \gtrless \frac{nd^2+2nd+2 \pm \sqrt{(nd^2+2nd+2)^2 - d^2(2+nd)^2}}{(nd+2)^2} \quad 22) \qquad (127)$$

Aus der Beziehung (127) kann man, bei gegebenem n und d errechnen, wie hoch bzw. wie niedrig der Anteil des Gutes A an den Gesamtlagerhaltungskosten sein muß, um durch Ausklammern dieses Gutes aus der Joint-Ordering-Politik zu einer weiteren Kostensenkung zu kommen.

Die Werte in Tabelle V sind erheblich höher als die in Tabelle IV. Der Anteil eines Gutes muß im allgemeinen enorm hoch (bzw. niedrig) sein, damit seine Ausklammerung aus der Joint-Ordering-Politik kostenmäßig zu rechtfertigen ist.

---

22) Diese Ableitung entspricht genau dem Ergebnis von Starr und Miller, Inventory Control, ... a.a.O., S.1o7. Jedoch wird bei Starr und Miller das negative Vorzeichen der Wurzel nicht berücksichtigt und auch der Ausdruck unterhalb der Wurzel wird anders zusammengefaßt. Aus der von mir vorgenommenen Zusammenfassung unterhalb der Wurzel ersieht man jedoch leichter, daß der Wert der Wurzel kleiner als die Summe vor der Wurzel ist. Der Zähler ist also stets positiv. Für a gibt es also zwei positive Werte.

Tabelle V

(Werte für a nach (127) in %; es wurde nur das positive Vorzeichen der Wurzel berücksichtigt)

n \ d	o,o1	o,o5	o,1o	o,2o	o,5o	1oo
2	99,99	99,93	99,79	99,3o	96,o3	72,oo
5	99,95	99,2o	97,44	92,85	79,93	31,48
1o	99,8o	96,75	9o,96	79,68	58,3o	16,14
2o	99,25	89,97	77,42	62,59	37,o2	6,o7
5o	96,16	7o,35	5o,98	33,25	17,49	2,44
1oo	89,11	49,99	31,92	18,96	9,29	1,22

Ähnlich wie bei (119b) führt auch hier die Grenzbetrachtung für $d \to \infty$ zu

$$\lim_{d \to \infty} a > \frac{1}{n}$$

Die Konvergenz erfolgt jedoch hier erheblich langsamer als in (119b).

1.4.2. Bedingungen für die Bildung zweier Gütergruppen unter Anwendung der Joint-Ordering-Politik.[23)]

Im oben behandelten Modell gingen wir davon aus, daß für Gut A und für die Sammelbestellung B jeweils die bestellfixen Kosten k_{bf} anfielen. Weitere Kostenersparnisse könnte man jedoch erreichen, wenn man anstatt von t_B^J das diesem am nächsten kommende ganze Vielfache von t_A setzte. Die bestellfixen Kosten k_{bf} würden dann nur noch einmal alle t_A Zeiteinheiten anfallen; an der Höhe der k_{bv} ändert sich natürlich nichts.

23) Vgl. Starr und Miller, Inventory Control,...a.a.O., S. 1o8.

Weiterhin soll nicht mehr angenommen werden, daß "Gruppe" A nur aus einem Gut besteht. Die Gruppe A soll sich im folgenden aus m verschiedenen Gütern mit einem Anteil $a \sum_i k_{1i} r_i$, $0 < a < 1$, und die Gruppe B aus (n-m) verschiedenen Gütern mit einem Anteil von $(1-a)\sum_i k_{1i} r_i$ an der mit den Lagerhaltungskostensätzen bewerteten Gesamtnachfrage zusammensetzen.

Auf beide Gütergruppen wird die Joint-Ordering-Politik angewandt. Für die Gruppe A erhält man

$$t_A^J = \sqrt{\frac{2(k_{bf} + mk_{bv})}{a \sum_{i=1}^{n} k_{1i} r_i}} \tag{128}$$

und

$$K_A^J = \sqrt{2(k_{bf} + mk_{bv})\, a \sum_{i=1}^{n} k_{1i} r_i} \tag{129}$$

Die genaue Herleitung eines t_B^J, das ein ganzes Vielfaches von t_A^J beträgt, ist algebraisch sehr schwer. Als praktisch ausreichende Approximation wollen wir das t_B^J bestimmen, das sich ergibt, wenn wir die k_{bf} außer Acht lassen; also

$$t_B^J = \sqrt{\frac{2(n-m)k_{bv}}{(1-a) \sum_{i=1}^{n} k_{1i} r_i}} \tag{130}$$

und

$$K_B^J = \sqrt{2(n-m)k_{bv}\,(1-a) \sum_{i=1}^{n} k_{1i} r_i} \tag{131}$$

Die Aufspaltung in zwei Gruppen ist folglich dann günstig, wenn

$$K_A^J + K_B^J < K_o^J \tag{132}$$

bzw. nach (129), (131) und (111)

$$\sqrt{(k_{bf}+mk_{bv})a} + \sqrt{(n-m)k_{bv}(1-a)} < \sqrt{k_{bf}+nk_{bv}} \tag{133a}$$

oder

$$\sqrt{(1+md)a} + \sqrt{(n-m)d(1-a)} < \sqrt{1+nd} \qquad (133b)$$

wobei wieder $d = k_{bv}/k_{bf}$.

(133b) wird jetzt wie oben zweimal quadriert. Dazu werden einige Abkürzungen eingeführt. Wir definieren

$$\alpha = 1 + md$$
$$\beta = (n - m)d$$
$$\alpha+\beta = 1 + nd$$

Für (133b) kann man dann schreiben:

$$\sqrt{\alpha a} + \sqrt{\beta(1 - a)} < \sqrt{\alpha+\beta} \qquad (134)$$

Wir quadrieren und erhalten

$$2\sqrt{\alpha\beta a(1 - a)} < \alpha(1 - a) + a\beta \qquad (135)$$

Um durch Radizieren wieder zu (134) zu gelangen, muß die rechte Seite von (135) größer Null sein. Da $0 < a < 1$ und $n \geq m$ ist dies stets der Fall.

Quadriert man (135) nochmals, so kommt man nach einigem Umformen zu der Beziehung

$$0 < \left[(\alpha + \beta)a - \alpha\right]^2 \qquad (136a)$$

oder wieder ausführlich geschrieben

$$0 < \left[(1 + nd)a - (1 + md)\right]^2 \qquad (136b)$$

Diese Beziehung gilt aber stets, ganz gleich welchen Wert a annimmt, d.h. wie groß der Anteil der jeweiligen Gruppe ist.

Welche Bedingung gilt nun für die Gruppenbildung? Dazu erinnern wir uns wieder der Annahme, daß das Bestellintervall t_B^J der Gütergruppe B ein ganzes Vielfaches von t_A^J der Gütergruppe A sein soll. Ersetzen wir

$t_B^J/t_A^J \geq 1$ und ganzzahlig

durch die Beziehungen (128) und (130), so gelangt man nach einigem Umformen zu der Beziehung

$$a > \frac{1 + md}{1 + nd} \qquad (137)$$

(137) reicht allein jedoch nicht aus. Hat man durch entsprechendes Gruppieren ein a gefunden, das (137) erfüllt, so muß weiter garantiert sein, daß das damit errechnete t_A^J und t_B^J wenigstens annähernd die obige Ganzzahligkeitsbedingung erfüllt.[24] Ist dies nicht der Fall, so kann keine allgemeine Aussage über die Vorteilhaftigkeit dieser Strategie gemacht werden.

1.4.3. Bedingungen für die Bestellung eines Gutes nur in ganzen Vielfachen des gemeinsamen Bestellintervalls.[25]

In den obigen Abschnitten (1.4.1.) und (1.4.2.) konnte gezeigt werden, daß es vorteilhaft sein kann für ein Gut bzw. für eine Gütergruppe ein besonderes Bestellintervall zu bestimmen. Das gemeinsame t^J für alle Güter war nicht mehr kostenoptimal.

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß die Gesamtlagerkosten weiter gesenkt werden können, wenn man Güter mit einem geringen Anteil an der mit den Lagerhaltungskostensätzen bewerteten Gesamtnachfrage in ganzen Vielfachen des gemeinsamen t^J bestellt, selbst wenn dieses t^J an sich optimal ist und die Bedingungen der vorigen Abschnitte nicht zutreffen.

Betrachten wir ein Gut D mit geringem Anteil an der mit den Lagerhaltungskostensätzen bewerteten Gesamtnachfrage. D gehört zu einer Gruppe von Gütern, die nach der Joint-Ordering-Politik in einem gemeinsamen Bestellintervall t^J bestellt werden. Die bestellfixen Kosten k_{bf} fallen alle t^J Zeiteinheiten nur einmal an und können als fixe Kosten keinem Gut verursachungsgemäß zugerechnet werden.

25) Vgl. Starr und Miller, Inventory Control,...a.a.O., S. 108-109.

Das ist anders bei den proportionalen Kostenkomponenten. Wird das Gut D z.B. gemeinsam mit den anderen Gütern der Gruppe alle t^J Zeiteinheiten bestellt, so trägt es mit

$$K^+_{D,t^J} = \frac{1}{2}\, t^J k_{1D} r_D + \frac{k_{bv}}{t^J} \qquad (138)$$

zu den Gesamtlagerkosten K^J bei.

Wird jetzt das Gut D nur noch alle $2t^J$ Zeiteinheiten in der Sammelbestellung mitgeordert, so ist sein Kostenbeitrag nun

$$K^+_{D,2t^J} = t^J k_{1D} r_D + \frac{k_{bv}}{2t^J} \qquad (139)$$

Dieser Wechsel von t^J auf $2t^J$ ist jedoch nur dann vorteilhaft, wenn dadurch eine Kostensenkung zu erreichen ist, wenn also

$$K^+_{D,t^J} - K^+_{D,2t^J} = -\frac{1}{2}\, t^J k_{1D} r_D + \frac{k_{bv}}{2t^J} > 0 \qquad (140a)$$

oder

$$(t^J)^2 < \frac{k_{bv}}{k_{1D} r_D} \qquad (140b)$$

Nun ist aber nach (112)

$$(t^J)^2 = \frac{2(k_{bf} + n k_{bv})}{\sum_{i=1}^{n} k_{1i} r_i} \qquad (141)$$

Wir können für (140b) daher auch schreiben

Anmerkung 24) von Seite 70.
Bei Starr und Miller, Inventory Control,...a.a.O., S. 108, wird die Herleitung der Beziehung (137) nicht exakt begründet und ein Hinweis auf die Ganzzahligkeitsbedingung unterbleibt.

$$\frac{k_{bv}}{k_{bf} + nk_{bv}} > \frac{2k_{1D}r_D}{\sum_{i=1}^{n} k_{1i}r_i} \qquad (142a)$$

oder

$$\frac{d}{1 + nd} > \frac{2k_{1D}r_D}{\sum_{i=1}^{n} k_{1i}r_i} \qquad (142b)$$

wobei wieder $d = k_{bv}/k_{bf}$.

Aus (142) läßt sich leicht bestimmen, wie niedrig der Anteil des Gutes D sein muß, wenn es nur alle $2t^J$ Zeiteinheiten mitbestellt werden soll. Es besteht jedoch keine Veranlassung, mit $2t^J$ die Untersuchung zu beenden. Vielmehr können ähnliche Beziehungen für gt^J, wobei $g = 1,2,3,\ldots$, abgeleitet werden. Es läßt sich folgende allgemeine Beziehung ableiten: Man wähle generell das größte g für das noch gilt:

$$K^+_{D,(g-1)t^J} - K^+_{D,gt^J} > 0 \qquad (143a)$$

oder ausführlicher

$$K^+_{D,(g-1)t^J} - K^+_{D,gt^J} = \frac{(g-1)}{2} t^J k_{1D}r_D + \frac{k_{bv}}{(g-1)t^J}$$

$$- \left[\frac{g}{2} t^J k_{1D}r_D + \frac{k_{bv}}{gt^J}\right] > 0 \qquad (143b)$$

Nach einigem Umformen erhält man

$$(t^J)^2 < \frac{2k_{bv}}{(g-1)(g)k_{1D}r_D} \qquad (144)$$

Setzt man nach (112) für

$$(t^J)^2 = \frac{2(k_{bf} + nk_{bv})}{\sum_{i=1}^{n} k_{1i}r_i} \qquad (145)$$

ein, so erhalten wir

$$\frac{k_{bv}}{(z-1)(z)(k_{bf}+nk_{bv})} > \frac{k_{1D}r_D}{\sum_{i=1}^{n} k_{1i}r_i} \qquad (146a)$$

oder

$$\frac{d}{(z-1)(z)(1+nd)} > \frac{k_{1D}r_D}{\sum_{i=1}^{n} k_{1i}r_i} \qquad (146b)$$

Die unter den Annahmen des Spezialfalls 2 vorgenommenen Untersuchungen über weitere Kostenersparnisse durch Bestellung verschiedener Güter oder Gütergruppen nur in Vielfachen des Joint-Ordering-Bestellintervalls sollten nur einige Hinweise geben und werden hier nicht weiter verfolgt.

1.5. Spezialfall 3.

Der letzte Spezialfall, der noch untersucht werden soll, ist eigentlich kein Spezialfall, sondern der allgemeine Fall, denn jetzt werden auch noch die Annahmen (1) und (2) der beiden vorhergehenden Spezialfälle fallen gelassen. D.h.

(1) $k_{bvi} \neq k_{bvj}$

(2) $k_{bfi} \neq k_{bfj} \neq k_{bf}^{J}$

In (1o2) bzw. (1o5(haben wir schon die Beziehung für die minimalen Gesamtlagerkosten der separaten Bestellpolitik bzw. der Joint-Ordering-Politik abgeleitet. Aus diesen erhält man

$$\frac{K_o^J}{K_{oI}} = \frac{\sqrt{(k_{bf}^J + \sum_{i=1}^{n} k_{bvi}) \sum_{i=1}^{n} k_{1i}r_i}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(k_{bfi} + k_{bvi}) k_{1i}r_i}} \qquad (147)$$

Benutzen wir auch hier die Beziehung t^{+}_{oi}/t^{J}_{o}, so ergibt sich für die relativen Kostenersparnisse E der Joint-Ordering-Politik

$$E = (1 - b' \frac{t^{+}_{oi}}{t^{J}_{o}}) \; 1oo \; \% \qquad (148a)$$

wobei hier

$$b' = \frac{k^{J}_{bf} + \sum_{i=1}^{n} k_{bvi}}{n \sum_{i=1}^{n} (k_{bfi} + k_{bvi})} \qquad (149)$$

Mit (148) und (149) haben wir die allgemeinste Beziehung, anhand derer man in einer konkreten Situation untersuchen kann, welche der beiden Bestellpolitiken vorzuziehen ist und wie groß bei Wahl der Joint-Ordering-Politik deren Vorteilhaftigkeit ist. Ähnlich wie in Spezialfall 2 gilt hier, daß die Joint-Ordering-Politik vorzuziehen ist, wenn (nach (148))

$$b' \frac{t^{+}_{oi}}{t^{J}_{o}} < 1 \qquad (148b)$$

oder

$$b' < \frac{t^{J}_{o}}{t^{+}_{oi}} \qquad (148c)$$

Für

$$b' \gtrless \frac{t^{J}_{o}}{t^{+}_{oi}}$$

gilt dasselbe wie in Spezialfall 2.

2. Joint-Ordering-Politik, angewandt auf ein zentrales Warenlager mit mehreren Nebenlägern.[26]

In allen bisherigen Untersuchungen hatten wir es stets mit einem einzigen Lager zu tun, das n verschiedene Güter von einem Lieferanten beziehen konnte. Es wurde, unter verschiedenen Annahmen über die Art der Beschaffungskosten und der anderen Kostenkomponenten, untersucht, wann es vorteilhaft ist, alle diese n Güter in einem gemeinsamen Bestellrhythmus, oder einige in einem Multiplum dieses Bestellrhythmus, von dem Lieferanten zu bestellen.

In diesem Abschnitt soll die Joint-Ordering-Politik für eine ganz andere Situation betrachtet werden. Nehmen wir an, ein Automobilwerk verkaufe seine Wagentypen über ein werkseigenes Verkaufsnetz und als Service werden zahlreiche Reparaturwerkstätten mit Ersatzteillagern unterhalten. In bestimmten Zeitabständen füllen die Werkstätten (im folgenden:Distriktläger) ihre Ersatzteillager durch Bestellungen beim zentralen Ersatzteillager (im folgenden: Zentrallager) auf.

Die Bestellung eines Distriktlagers beim Zentrallager verursacht Kosten. Diese Kosten sollen abhängen

a) von der Anzahl Bestellungen überhaupt; das sind die bestellfixen Kosten des Distriktlagers;
b) von der Anzahl verschiedener Güter, die zu einer Sammelbestellung zusammengefaßt werden.

Das Problem besteht nun darin, die Häufigkeit, mit der von den Distriktlagern Bestellungen an das Zentrallager ergehen und die Häufigkeit, mit der die verschiedenen Güter auf diesen Bestellungen der Distriktlager erscheinen, so zu bestimmen, daß die Lagerhaltungs- und Bestell-

26) Die folgende Untersuchung ist, bis auf die andere Symbolik im wesentlichen eine Wiedergabe von E.Naddor und Saltzman, "Optimal Reorder Periods for an.....

kosten der Distriktlager insgesamt minimiert werden.

Betrachten wir zunächst nur ein Distriktlager j mit $i = 1,2,\ldots,n$ verschiedenen Gütern. Nach den oben getroffenen Annahmen setzen sich die Bestellkosten des Distriktlagers zusammen aus einer bestellfixen Kostenkomponente k_{bfj}, die bei jeder Bestellung anfällt, und aus einer proportionalen Kostenkomponente, die von der Anzahl verschiedener Güter, die zu einer Bestellung zusammengefaßt werden, abhängt. Für die Bestellkosten einer einzigen Bestellung des Distriktlagers vom Zentrallager gilt daher die Beziehung

$$k_{bj} = k_{bfj} + \sum_{i=1}^{n} k_{bvi,j} \tag{150}$$

Die Häufigkeit, mit der vom Distriktlager j eine Bestellung an das Zentrallager erfolge, sei f_j^J .

$$f_j^J = \frac{1}{t_j^J} \tag{151}$$

Ist das individuelle Bestellintervall eines Gutes i gleich $t_{i,j}$, dann gilt für seine Bestellhäufigkeit

$$f_{i,j} = \frac{1}{t_{i,j}} \tag{152}$$

Bei der Joint-Ordering-Politik wird nun aber jedes Gut in einem gemeinsamen Bestellintervall, bzw. einem Multiplum davon, bestellt. Es muß daher noch gefordert werden

$$\frac{t_{i,j}}{t_j^J} = h_{i,j} \geq 1 \text{ und ganzzahlig} \tag{153}$$

$h_{i,j}$ gibt an, wie oft Gut i auf der Sammelbestellung

.... Inventory System with variable Costs of Ordering", in: Operations Research, Bd.6, 1958, S.676-685; Vgl. weiterhin F.Hanssmann, Operations Research in Production and Inventory Control, ... a.a.O., S.161-163; E.Naddor, Inventory Systems, ...a.a.O., S.1o2-1o5.

des Distriktlagers j erscheint.

Für die Gesamtlagerkostenfunktion pro Zeiteinheit bei Anwendung der Joint-Ordering-Politik in Distriktlager j ergibt sich die Beziehung

$$K_j^J = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{k_{li,j} r_{ij} t_{i,j}}{2} + \frac{k_{bvi,j}}{t_{i,j}} \right) + \frac{k_{bfj}}{t_j^J} \qquad (154)$$

die unter der Nebenbedingung (153) zu minimieren ist.

Erweitern wir jetzt das Problem, indem wir alle j = 1,2, ...,m Distriktlager in die Analyse einbeziehen. Wir können jetzt zwei Fälle unterscheiden:

a) die einzelnen Distriktlager bestimmen ihre eigenen optimalen Bestellintervalle nach der Joint-Ordering-Politik.

Wir haben jetzt eine Matrix t_{ij} mit nm individuellen Bestellintervallen der einzelnen Güter in den jeweiligen Lägern. Weitere (n,m)-Matrizen haben wir für die k_{lij}, k_{bvij} und die r_{ij}. Für die k_{bfj} und t_j^J haben wir je einen Vektor mit m Gliedern.

Unser Problem lautet nun: Man minimieren bezüglich

$$(t_{11},\ldots,t_{ij},\ldots,t_{nm} \mid t_1^J,\ldots,t_j^J,\ldots,t_m^J)$$

$$K^J = \sum_{j=1}^{m} K_j^J = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{k_{lij} r_{ij} t_{ij}}{2} + \frac{k_{bvij}}{t_{ij}} \right) + \sum_{j=1}^{m} \frac{k_{bfj}}{t_j^J} \qquad (155)$$

unter den Nebenbedingungen

$$h_{ij} \geq 1 \text{ und ganzzahlig} \qquad (156)$$

b) für das ganze System wird ein optimales gemeinsames Bestellintervall t^J bestimmt.

Der Vektor t_j^J reduziert sich zu einem Skalar. Das Problem lautet nun:

Man minimiere bezüglich $(t_{11},\ldots,t_{ij},\ldots,t_{nm} \mid t^J)$

$$K^J = \sum_{j=1}^{m} K_j^J = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{k_{lij} r_{ij} t_{ij}}{2} + \frac{k_{bvij}}{t_{ij}} \right) + \frac{1}{t^J} \sum_{j=1}^{m} k_{bfj} \qquad (157)$$

unter den Nebenbedingungen (156).

Es soll nun gezeigt werden, wie man dieses schwierige Problem approximativ lösen kann. Dabei wollen wir uns zunächst wieder auf das Distriktlager j allein beschränken.

Unter Berücksichtigung von (153) läßt sich (154) auch wie folgt schreiben:

$$K_j^J = \frac{1}{2} t_j^J \sum_{i=1}^{n} k_{lij} r_{ij} h_{ij} + \frac{1}{t_j^J} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_{bvij}}{h_{ij}} + \frac{k_{bfj}}{t_j^J} \qquad (158)$$

Wir leiten (158) jetzt partiell nach t_j^J ab, setzen die Ableitung gleich Null und erhalten

$$t_{oj}^J = \sqrt{\frac{2(k_{bfj} + \sum_{i=1}^{n} k_{bvij}/h_{ij})}{\sum_{i=1}^{n} k_{lij} r_{ij} h_{ij}}} \qquad (159)$$

Setzen wir t_{oj}^J in (158) ein, so erhalten wir

$$K_{oj}^J = \sqrt{2(k_{bfj} + \sum_{i=1}^{n} k_{bvij}/h_{ij}) \sum_{i=1}^{n} k_{lij} r_{ij} h_{ij}} \qquad (160)$$

Das Problem ist noch nicht gelöst, denn in (160) stehen noch die h_{ij}; diese sind so zu bestimmen, daß K_{oj}^J ein Minimum wird.

Wir differenzieren (160) partiell nach h_{ij}, setzen die Ableitung gleich Null und erhalten

$$h_{oij} = \sqrt{\frac{k_{bvij} \sum_{i=1}^{n} k_{lij} r_{ij} h_{ij}}{(k_{bfj} + \sum_{i=1}^{n} k_{bvij}/h_{ij}) k_{lij} r_{ij}}} \qquad (161)$$

In (161) steht h_{ij} jedoch immer noch unter der Wurzel. Naddor-Saltzman approximieren h_{oij}, indem sie den Wert aller h_{ij} unter der Wurzel zunächst gleich 1 setzen.[27] Als erste Approximation für die h_{oij} erhält man

$$h_{oij} = \sqrt{\frac{k_{bvij} \sum_{i=1}^{n} k_{lij} r_{ij}}{(k_{bfj} + \sum_{i=1}^{n} k_{bvij}) k_{lij} r_{ij}}} \qquad (162)$$

Die so gefundenen Werte setzt man in (161) ein und erhält eine zweite Approximation für die h_{ij}. So kann man iterativ noch weitere Approximationen durchführen. Wenn das Verfahren zu keiner weiteren Verbesserung der Schätzungen der h_{ij} führt, wird es abgebrochen.

Wegen der Ganzzahligkeitsbedingung (156) müssen die approximierten Werte von h_{oij} noch auf die nächste ganze Zahl aufgerundet werden. Wegen der relativen Flachheit der Gesamtlagerkostenfunktion um den Bereich ihres Minimums herum, führen die oben vorgenommenen Approximationen und Aufrundungen dennoch nur zu geringen Kostenerhöhungen.[28]

Mit den Beziehungen (159), (160), (161) und (162) haben wir eine approximative Lösung für das Distriktlager j gefunden. Kehren wir wieder zum Gesamtproblem zurück.

---

27) Vgl. E.Naddor und S. Saltzman, "Optimal Reorder Periods,...", a.a.O., S. 681.

28) Zur Frage der Sensibilität der Gesamtlagerkostenfunktion vgl. E.Naddor, "Elements of Inventory Systems", in: C.D.Flagle, H.Huggins, R.H.Roy, Operations Research and Systems Engineering, Baltimore 1960, S.311-364, hier bes. S.350-362; E.Naddor, Inventory Systems,... a.a.O., S.52-53, 63-70,84-87; Starr und Miller, Inventory Control,...a.a.O., S.178-181; W.Müller-Merbach,

In dem oben erwähnten Fall a) bestimmt jedes Distriktlager nach (159) bzw. (162) sein t_{oj}^{J} bzw. seine h_{oij}. Das Gesamtkostenminimum des Systems ergibt sich als die Summe der minimalen Gesamtkosten der einzelnen Distriktlager nach (160).

Etwas anderes gilt, wenn man den Fall b) untersucht. Hier richten sich alle Distriktläger nach einem gemeinsamen t^{J}. Wir leiten dazu (157) partiell nach t^{J} ab, wobei wir wie in (158) mit Hilfe der h_{ij} die t_{ij} eliminiert haben, setzen die Ableitung gleich Null und erhalten

$$t_o^J = \sqrt{\frac{2\left(\sum_{j=1}^{m} k_{bfj} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} k_{bvij}/h_{ij}\right)}{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} k_{lij} r_{ij} h_{ij}}} \qquad (163)$$

Dieses t_o^J setzen wir in (157) ein und erhalten

$$K_o^J = \sqrt{2\left(\sum_{j=1}^{m} k_{bfj} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} k_{bvij}/h_{ij}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} k_{lij} r_{ij} h_{ij}} \qquad (164)$$

Jetzt differenzieren wir (164) partiell nach h_{ij}. Setzt man in den so erreichten Wurzelausdruck für h_{ij} wieder den Wert 1 ein, so ergibt sich als erste Approximation

$$h_{oij} \approx \sqrt{\frac{k_{bvij}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} k_{lij} r_{ij}}{\left(\sum_{j=1}^{m} k_{bfj} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} k_{bvij}\right) k_{lij} r_{ij}}} \qquad (165)$$

Weitere Approximationen werden, wie oben schon geschildert, gewonnen.

....."Sensibilitätsanalyse der Losgrößenbestimmung", in: Unternehmensforschung, Bd.6, 1962, S.79-83.

Mit (163) - (165) haben wir die Lösung des Systems für den Fall b). Ob Fall a) oder Fall b) günstiger ist, kann nur im Einzelfall anhand der abgeleiteten Beziehungen überprüft werden. Wurden in dem System bisher weder die Strategie a noch die Strategie b angewandt, sondern nach irgendwelchen intuitiven Verfahren vorgegangen, so führen beide Strategien zu Kostenersparnissen. Es ist bislang aber noch nicht berücksichtigt worden, daß jede Umstellung der Lagerhaltungsstrategie eine Änderung in den sogenannten Systemkosten verursacht. Ein Ansteigen der Systemkosten, zu denen man auch die Kosten für die Lagerhaltungsstudien hinzufügt, muß gegen die Ersparnisse der neuen Lagerhaltungsstrategien abgewogen werden. Dieser Vergleich erlaubt erst eine endgültige Entscheidung. Eine Behandlung der damit zusammenhängenden Fragen findet man im Teil II des Buches von Starr und Miller.[29)]

Mit den obigen Untersuchungen will ich die Anwendungen der Joint-Ordering-Politik auf deterministische Lagerhaltungssysteme abschließen. Mittels einer einheitlichen Symbolik wurden die Ergebnisse von Balintfy, Naddor, Saltzman, Starr und Miller verglichen, vereinheitlicht und teils verallgemeinert. Weiterhin wurde die Joint-Ordering-Politik auf einige bisher noch nicht untersuchte Modellsituationen angewandt. Eine Vollständigkeit wurde nicht erstrebt und ist auch nicht zu erreichen. Die ausgewählten Modellsituationen kann man aber als die wichtigsten und bekanntesten ansehen.

Wie der Verlauf der Untersuchungen jedoch gezeigt hat, führt die Berücksichtigung immer neuer, zusätzlicher Bedingungen zu immer größeren Schwierigkeiten und immer komplexeren Formelgebilden.

---

29) Vgl. M.K.Starr und D.W.Miller, Inventory Control,... a.a.O., S.171 ff.
Bei H.-J.Schrader, Die Theorie der Vorratsplanung, ... a.a.O., S.22-23, findet man knapp aufgezählt, was alles unter die Systemkosten fällt.

Teil IV: DAS JOINT-ORDERING-PROBLEM, ANGEWANDT AUF EINIGE STOCHASTISCHE LAGERHALTUNGSMODELLE.

1. Einige Bemerkungen zu den stochastischen Lagerhaltungssystemen.

Den bisher behandelten Teilen dieser Arbeit lag eine Annahme zugrunde, die in WIrklichkeit nur selten oder nie anzutreffen sein dürfte: die Annahme einer konstanten und bekannten Nachfragerate der Güter. Trotzdem ist eine Analyse deterministischer Lagerhaltungsmodelle nicht so sinnlos, wie es zunächst den Anschein haben mag. Ehe man komplexe Modellsituationen untersucht, ist es sinnvoll, zuerst einfachere Modelle zu entwickeln und die für diese geltenden Beziehungen abzuleiten. Weiterhin kann man die Lösungen deterministischer Modelle als Standards benutzen, mit denen die Ergebnisse ähnlicher stochastischer Modelle verglichen werden können.[30)]

In deterministischen Modellen kann z.B. die Lieferzeit unberücksichtigt bleiben, auch wenn sie eine Rolle spielt. Durch eine einfache Variablentransformation kann man die Variable Lieferzeit zunächst aus der Modelluntersuchung entfernen. Hat man dann die Lösung gefunden, macht man die Variablentransformation einfach wieder rückgängig und man erhält die Lösung unter Berücksichtigung der Lieferzeit.[31)]

In stochastischen Modellen hat die Lieferzeit jedoch einen bedeutenden Einfluß auf die Analyse der Lagerhaltungssysteme. Aufgrund der stochastischen Nachfrage kann der Lagerbestand während der Lieferzeit sich in nicht erwarteter Weise verändern. Auch kann die Lieferzeit selbst eine stochastische Variable sein.

---

30) Vgl.E.Naddor, Inventory Systems,...a.a.O., S.45.
31) Vgl.E.Naddor, Inventory Systems,...a.a.O., S.31.

Aber auch in stochastischen Lagerhaltungsmodellen, in denen die Lieferzeit explizit nicht berücksichtigt wird, ergeben sich einige Änderungen gegenüber den deterministischen Lagerhaltungsmodellen. So wird man aufgrund der unsicheren Nachfrage einen bestimmten Sicherheitsbetand zusätzlich zum "normalen" Durchschnittsbestand halten. Der durchschnittliche Lagerbestand und damit auch die Gesamtlagerkosten werden im stochastischen Fall allgemein höher sein als im vergleichbaren deterministischen Fall.

Im Rahmen dieser Arbeit kann nicht näher auf die Behandlung stochastischer Lagerhaltungsmodelle eingegangen werden. Die unter Anmerkung 7 aufgeführten Monographien und Aufsätze enthalten zahlreiche Beiträge, die sich eingehend mit diesen Problemen befassen. Hier sollen nur einige Beiträge berücksichtigt werden, die sich speziell der Joint-Ordering-Politik widmen.

2. Joint-Ordering-Politik, angewandt auf ein stochastisches Lagerhaltungssystem mit gleichem und konstantem Variationskoeffizienten der Nachfragerate für alle Güter.[32)]

Ich will die Analyse der Joint-Ordering-Politik für stochastische Modelle mit einem ganz einfachen, wenn auch sehr unrealistischen Spezialfall beginnen, der eng verwandt ist mit dem Spezialfall 2 aus Teil III dieser Arbeit.

Nehmen wir wie dort an:

(1) $k_{bvi} = k_{bvj} = k_{bv}$

(2) $k_{bfi} = k_{bfj} = k_{bf} = k_{bf}^{J}$

Anstatt der dort geltenden Annahme (3) lautet die entsprechende Annahme jetzt

---

32) Bis auf die verschiedene Symbolik im folgenden die Wiedergabe von J.L.Balintfy, "On a Basic Class of Multi-item Inventory Problems", ... a.a.O., S.291.

(3) $k_{1i}\bar{r}_i \neq k_{1j}\bar{r}_j$

Die Nachfragerate r_i sei eine Zufallsvariable mit bekannter Wahrscheinlichkeitsverteilung mir $\bar{r}_i$ als mittlerer Nachfragerate, σ_i als Standardabweichung und einem für alle Güter gleichen Variationskoeffizienten

$$\frac{\sigma_i}{\bar{r}_i} = \frac{\sigma_j}{\bar{r}_j} = v = \text{konstant.}$$

r_i sei stochastisch unabhängig von Zeiteinheit zu Zeiteinheit. Die Nachfrage innerhalb eines größeren Zeitintervalls kann man, da r_i stets positiv ist, als einen stochastischen Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen ansehen. Die durchschnittliche Bestellmenge eines Gutes beträgt analog zu (4) jetzt

$$\bar{q}_i = \bar{r}_i t_i .$$

Alle t_i Zeiteinheiten, bzw. alle t^J Zeiteinheiten bei der Joint-Ordering-Politik, werden $\bar{r}_i t_i$ Mengeneinheiten des Gutes i bestellt. Jedoch muß aufgrund der ungewissen Nachfrage noch ein Sicherheitsbestand gegen mögliche Fehlmengen hinzukommen.
Nehmen wir an, $z\sigma_i$ werde als Sicherheitsbestand gewählt, wobei $z > 0$, dann wird sich der durchschnittliche Lagerbestand um $z\sigma_i t_i = zv\bar{r}_i t_i$ erhöhen.

Gehen wir jetzt an die Herleitung der Gesamtlagerkostenfunktionen. Analog zu (93) gilt für die separate Bestellpolitik jetzt

$$K_i = \frac{1}{2} k_{1i}\bar{r}_i t_i + k_{1i} zv\bar{r}_i t_i + \frac{k_{bf}}{t_i} + \frac{k_{bv}}{t_i} \qquad (166)$$

und für die Gesamtlagerkostenfunktion aller Güter

$$K_I = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} k_{1i}\bar{r}_i t_i + k_{1i} zv\bar{r}_i t_i + \frac{k_{bf}}{t_i} + \frac{k_{bv}}{t_i} \right) \qquad (167)$$

Die Lösung des Optimierungsproblems ergibt hier:

$$t_{oi} = \sqrt{\frac{2(k_{bf} + k_{bv})}{(1 + 2zv)k_{li}\bar{r}_i}} \tag{168}$$

und

$$q_{oi} = \bar{r}_i t_{oi} = \sqrt{\frac{2\bar{r}_i\,(k_{bf} + k_{bv})}{(1 + 2zv)k_{li}}} \tag{169}$$

Weiterhin gilt:

$$K_{oI} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2(k_{bf} + k_{bv})(1 + 2zv)k_{li}\bar{r}_i} \tag{170a}$$

bzw.

$$K_{oI} = 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{k_{bf} + k_{bv}}{t_{oi}} \tag{170b}$$

Analog zu (103) erhält man für die Joint-Ordering-Politik folgende Beziehungen:

$$K^J = \frac{1}{2} t^J \sum_{i=1}^{n} k_{li}\bar{r}_i + zvt^J \sum_{i=1}^{n} k_{li}\bar{r}_i + \frac{nk_{bv}}{t^J} + \frac{k_{bf}}{t^J} \tag{171}$$

mit

$$t_o^J = \sqrt{\frac{2(k_{bf} + nk_{bv})}{(1 + 2zv) \sum_{i=1}^{n} k_{li}\bar{r}_i}} \tag{172}$$

und

$$K_o^J = \sqrt{2(k_{bf} + nk_{bv})(1 + 2zv) \sum_{i=1}^{n} k_{li}\bar{r}_i} \tag{173a}$$

bzw.

$$K_o^J = \frac{2(k_{bf} + nk_{bv})}{t_o^J} \tag{173b}$$

Aus (170) und (173) erhält man

$$\frac{K_o^J}{K_{oI}} = \frac{\sqrt{(k_{bf} + nk_{bv})(1 + 2zv) \sum_{i=1}^{n} k_{li}\bar{r}_i}}{\sqrt{(k_{bf} + k_{bv})} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(1 + 2zv)k_{li}\bar{r}_i}} \qquad (174)$$

Bildet man ähnlich wie im Teil III, Spezialfall 2, die Beziehung

$$\frac{t_{oi}^+}{t_o^J} = \frac{n\sqrt{(k_{bf} + k_{bv})(1 + 2zv) \sum_{i=1}^{n} k_{li}\bar{r}_i}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(1 + 2zv)k_{li}\bar{r}_i(k_{bf} + nk_{bv})}} \qquad (175)$$

und multipliziert man diese mit

$$b = \frac{k_{bf} + nk_{bv}}{n(k_{bf} + k_{bv})} \qquad (117)$$

so erhalten wir wieder (174). Die relativen Kostenersparnisse der Joint-Ordering-Politik ergeben sich demnach aus

$$E = \left(1 - \frac{k_{bf} + nk_{bv}}{n(k_{bf} + k_{bv})} \frac{t_{oi}^+}{t_o^J}\right) 100\ \% \qquad (176a)$$

oder

$$E = \left(1 - \frac{1 + nd}{n(1 + d)} \frac{t_{oi}^+}{t_o^J}\right) 100\ \% \qquad (176b)$$

wobei wieder $d = k_{bv}/k_{bf}$.

Die Beziehungen (118) und (176) sehen formal gleich aus. Es muß jedoch berücksichtigt werden, daß t_{oi}^+/t_o^J nach (175) errechnet werden muß.

Damit die Joint-Ordering-Politik nun vorteilhaft ist, muß gelten (vgl. 118 d)

$$\frac{1 + nd}{n(1 + d)} < \frac{t_o^J}{t_{oi}^+} \qquad (177)$$

Für ein bestimmtes Lagerhaltungssystem sind alle Größen in (175) und damit auch in (177) gegeben mit Ausnahme von z. Ist z = 0, d.h. wird kein Sicherheitsbestand gehalten, dann entsprechen die Beziehungen (174) und (114) einander. Lediglich statt r_i steht $\bar{r}_i$. Nehmen wir an, für diesen Fall sei die Joint-Ordering-Politik vorteilhaft. Läßt man nun den Wert von z wachsen, so wird einmal ein Punkt erreicht, an dem die Joint-Ordering-Politik aufhört vorteilhaft zu sein. Für unser einfaches stochastisches Modell bedeutet das: Ob die separate Bestellpolitik oder die Joint-Ordering-Politik vorteilhaft ist, hängt wesentlich von der Wahl der Höhe der Sicherheitsbestände ab.

3. Joint-Ordering-Politik, angewandt auf ein stochastisches Fehlmengenmodell.[33)]

3.1. Das stochastische Fehlmengenmodell für ein Gut.

Jetzt soll die Joint-Ordering-Politik für ein einfaches stochastisches Fehlmengenmodell betrachtet werden. Um die Ableitungen zu vereinfachen, nehmen wir wie im Teil II Unabhängigkeit der Beschaffungskosten k_b von der Zahl der zu einer Sammelbestellung zusammengefaßten verschiedenen Güter an. D.h. bei einer Sammelbestellung tritt lediglich einmal k_b auf.

Die Modellsituation ist - abgesehen von den stochastischen Aspekten - ähnlich der von Abschnitt 4, Teil II. k_l und k_f bedeuten die Lagerhaltungs- und Fehlmengenkosten pro Mengen- und Zeiteinheit. Die Lieferzeit wird außer Acht gelassen. Anstatt der Nachfragerate r - die in stochastischen Modellen oft keinen Sinn hat - betrach-

33) Im folgenden bis auf die andere Symbolik wesentlich die Wiedergabe von E.Naddor, "Some Models of Inventory and an Application", in: Management Science, Bd.2, 1956, S.299-312, bes. S.309-312.

ten wir jetzt die Nachfrage R selbst. R sei eine Zufallsvariable, die jeweils auf ein bestimmtes Bestellintervall bezogen ist und kann - so nehmen wir an - mit Hilfe einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\psi(R)$ geschätzt werden.

Die Bestellpolitik ist vom Typ (t,S), d.h. alle t Zeiteinheiten wird das Lager für ein bestimmtes Gut auf das Lagerniveau S wiederaufgefüllt.

Ehe wir uns dem Joint-Ordering-Problem zuwenden, sollen die Beziehungen des stochastischen Fehlmengenmodells für ein Gut abgeleitet werden.

Wir können zwei Situationen unterscheiden:

a) Während t ist die Nachfrage R kleiner (oder höchstens gleich) dem maximalen Lagerniveau S ($R \leqq S$), oder
b) während t ist die Nachfrage R größer als das maximale Lagerniveau S ($R>S$).

In der Situation a, $R \leqq S$, treten keine Fehlmengen auf. Die Lagerhaltungskosten betragen daher

$$K_L = k_1(S - \frac{R}{2})\, t \tag{178}$$

In Situation b, $R > S$, treten sowohl Lagerhaltungs- wie auch Fehlmengenkosten auf. Diese betragen

$$K_L + K_F = k_1 \frac{S^2}{2R}\, t + k_f \frac{(R - S)^2}{2R}\, t \tag{179}$$

Der Lagerabgang erfolgt jedoch stochastisch. Wir können daher mit Hilfe von $\psi(R)$ nur die erwarteten Gesamtlagerkosten K für ein bestimmtes Zeitintervall t berechnen. Wir kommen zu folgender Beziehung

$$K = \int_0^S k_1(S - \frac{R}{2})\, t\, \psi(R)dR + \int_S^\infty k_1 \frac{S^2}{2R}\, t\, \psi(R)dR + \int_S^\infty k_f \frac{(R - S)^2}{2R}\, t\, \psi(R)dR + k_b \tag{180}$$

Auf dem Wege zum Lösung des Optimierungsproblems leiten wir (180) partiell nach S ab.[34)]

$$\frac{\delta K}{\delta S} = k_1 t \int_0^S \psi(R)dR + k_1 t(S - \frac{S}{2})\psi(S) +$$

$$+ k_1 t \int_S^\infty \frac{S}{R}\psi(R)dR - k_1 t(\frac{S^2}{2S})\psi(S) - \qquad (181)$$

$$- k_f t \int_S^\infty \frac{R-S}{R}\psi(R)dR - k_f t \frac{(S - S)}{2S}\psi(S)$$

Der 2. und 4.Term der rechten Seite heben sich gegenseitig auf und der 6.Term hat den Wert 0.

Setzen wir

$$\phi(S) = \Psi(S) + \theta(S) \qquad (182)$$

wobei

$$\Psi(S) = \int_0^S \psi(R)dR \qquad (183)$$

und

$$\theta(S) = S \int_S^\infty \frac{\psi(R)}{R}dR \qquad (184)$$

in (181) ein, so läßt sich diese Beziehung weiter vereinfachen.

$$\frac{\delta K}{\delta S} = k_1 t\Psi(S) + k_1 t\theta(S) - k_f t(1-\Psi(S)) + k_f t\theta(S) \qquad (185)$$

oder

$$\frac{\delta K}{\delta S} = t\left[(k_1 + k_f)\phi(S) - k_f\right] \qquad (186)$$

Weil k_1 und k_f beide nicht Null sind, und auch $\phi'(S_o)>0$, da

---

34) Vgl. A.Ostrowski, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Band III, Integralrechnung auf dem Gebiet mehrerer Variablen, Basel und Stuttgart 1962, S. 123-129.

$$\phi'(S) = \Psi'(S) + \Theta'(S) = \int_S^\infty \frac{\psi(R)}{R}\, dR > 0$$

ist

$$\frac{\delta^2 K}{\delta S^2} = (k_1 + k_f)\, t \int_S^\infty \frac{\psi(R)}{R}\, dR > 0 \qquad (187)$$

und wir haben bei

$$\frac{\delta K}{\delta S}\Big|_{S=S_o} = 0$$

oder

$$\phi(S_o) = \frac{k_f}{k_1 + k_f} \qquad (188)$$

ein relatives Kostenminimum.

Jetz nach t partiell zu differenzieren und ähnlich wie im deterministischen Fall das Gleichungssystem zu lösen, ist hier zu schwierig. Wir geben die Bedingung der Kontinuität für t auf und stellen uns vor, t könne nur bestimmte diskrete Werte annehmen. Für das praktische Arbeiten mit unserem Modell muß nämlich beachtet werden: Für jeden Wert, den wir für t setzen, muß die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\psi(R)$ bestimmt werden. In der Praxis nimmt man für t nur einige Setzungen vor, etwa t = 1,2,...,T Wochen, und bestimmt die dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $\psi_t(R)$. Da die Gesamtlagerkostenfunktion pro Zeiteinheit konvex ist, existiert nur ein Minimum und das optimale t kann meist schon nach einigen Alternativrechnungen gefunden werden. Ist z.B. K(t=1) > K(t=2) < K(t=3), dann ist t = 2 optimal. Eine genauere Bestimmung des optimalen t ist - sofern die Maßeinheit für t nicht zu groß gewählt wurde - wegen der allgemeinen Flachheit der Kostenfunktion im Bereich des Optimums nicht mehr erforderlich.

Mit

$$\Phi(S_o) = \frac{k_f}{k_l + k_f} \qquad (188)$$

kann man daher, indem man die $\psi_t(R)$ für verschiedene t-Werte bestimmt, relativ schnell das Optimierungsproblem dieses stochastischen Fehlmengenmodells für ein Gut lösen.

1. Man errechnet zunächst den Wert $k_f/(k_l+k_f)$.

2. Dann bestimmt man für verschiedene Werte von t

$$\Psi_t(S) = \int_o^S \psi_t(R)dR \quad \text{und} \quad \theta_t(S) = \int_S^\infty \frac{\psi_t(R)dR}{R}$$

und damit $\Phi_{t*}(S)$.

3. Aus den ersten beiden Schritten und der Beziehung (188) erhält man optimale Werte für $S_o(t)$.

4. Für jedes t setzt man jetzt das optimale $S_o(t)$ in die Gesamtkostenfunktion (180) ein und dividiert diese durch t. Aus den Alternativen wähle man das t aus, das zu den geringsten Kosten pro Zeiteinheit geführt hat. Damit ist das Optimierungsproblem gelöst.

3.2. Die Joint-Ordering-Politik in einem stochastischen Fehlmengenmodell für n Güter.

Bei der Joint-Ordering-Politik besteht unser Problem darin, unter den zu Anfang von (3.1.) genannten Bedingungen herauszufinden, wie oft eine Sammelbestellung zu erfolgen hat und wie hoch das optimale Lagerniveau S_{oi} eines jeden Gutes sein soll.

Wir gehen wie folgt vor:

1. Man bestimme zunächst für verschiedene Werte von t, z.B. t = 1,2,...,T Wochen die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $\psi_{it}(R)$ aller i = 1,...,n Güter.
2. Dann berechne man für jedes Gut den Wert von $k_{fi}/(k_{li} + k_{fi})$.
3. Weiterhin bestimme man

$$\Psi_{it}(S) = \int_{o}^{S} \psi_{it}(R)dR \text{ und } \Theta_{it}(S) = S \int_{S}^{\infty} \frac{\psi_{it}(R)}{R} dR$$

und damit $\Phi_{it}(S)$.

4. Aus den Ergebnissen der Schritte 2 und 3 kann man nun die optimalen $S_{oi}(t)$ der einzelnen Güter gewinnen.
5. Jetzt führt man für die verschiedenen Werte von t folgende Alternativrechnungen durch:
   Für ein bestimmtes t errechnet man (unter Außerachtlassung von k_b aus (180) die optimalen Lagerhaltungs- und Fehlmengenkosten für alle n Güter. Diese Kosten werden nun über n aufsummiert und dazu werden nur einmal - wie es der Joint-Ordering-Politik entspricht - die Beschaffungskosten k_b addiert. Die so gewonnenen

Gesamtkosten werden durch t dividiert. Wir erhalten eine Beziehung für die Gesamtlagerkosten pro Zeiteinheit für das stochastische Fehlmengenmodell bei Joint-Ordering-Politik.
Ausführlich geschrieben lautet die Beziehung zunächst:

$$
\begin{aligned}
K^J = \frac{1}{t}\Bigg[& t \sum_{i=1}^{n} k_{li} \int_{S_{oi}(t)}^{S_{oi}(t)} \psi_{it}(R)\,dR \\
& - \frac{1}{2} t \sum_{i=1}^{n} k_{li} \int_{o}^{S_{oi}(t)} R_i \psi_{it}(R)\,dR \\
& + \frac{1}{2} t \sum_{i=1}^{n} k_{li} S_{oi}^2(t) \int_{S_{oi}(t)}^{\infty} \frac{\psi_{it}(R)}{R_i}\,dR \\
& + \frac{1}{2} t \sum_{i=1}^{n} k_{fi} \int_{S_{oi}(t)}^{\infty} R_i \psi_{it}(R)\,dR \\
& - t \sum_{i=1}^{n} k_{fi} S_{oi}(t) \int_{S_{oi}(t)}^{\infty} \psi_{it}(R)\,dR \\
& + \frac{1}{2} t \sum_{i=1}^{n} k_{fi} S_{oi}^2(t) \int_{S_{oi}(t)}^{\infty} \frac{\psi_{it}(R)}{R_i}\,dR \\
& + k_b \Bigg]
\end{aligned}
\tag{190}
$$

Mit Hilfe von (183) und (184) läßt sich diese Beziehung noch etwas vereinfachen.

$$
\begin{aligned}
K^J = \frac{1}{t}\Bigg\{ & t \sum_{i=1}^{n} \Psi_{it}(S_o) k_{li} S_{oi}(t) \\
& - t \sum_{i=1}^{n} \left[1 - \Psi_{it}(S_o)\right] k_{fi} S_{oi}(t) \\
& + \frac{1}{2} t \sum_{i=1}^{n} \theta_{it}(S_o) \left[k_{li} + k_{fi} \right] S_{oi}^2(t) \\
& - \frac{1}{2} t \Bigg[\sum_{i=1}^{n} k_{li} \int_{o}^{S_{oi}(t)} R_i \psi_{it}(R)\,dR \\
& - \sum_{i=1}^{n} k_{fi} \int_{S_{oi}(t)}^{\infty} R_i \psi_{it}(R)\,dR \Bigg] \quad + k_b \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{191}
$$

Aus den nach (191) für verschiedene Werte von t errechneten Ergebnissen wähle man das Minimum. Das diesem entsprechende t ist optimal. Damit haben wir die Lösung des Joint-Ordering-Problems für ein einfaches stochastisches Fehlmengenmodell.

Obwohl obige Beziehungen recht kompliziert ausschauen, sind sie durchaus operabel. Durch geschicktes Anlegen von Wertetabellen lassen sich einfache Beispiele berechnen. Ein numerisches Beispiel für zwei Güter und der Hinweis, daß das Problem auch für größere Systeme relativ leicht mit einer IBM 6o4 zu bewältigen ist, findet man bei Naddor.[35)]

Von demselben Autor stammt eine weitere Untersuchung eines stochastischen Lagerhaltungsmodells mit mehreren Gütern, in der die Fehlmengenkosten eine Rolle spielen, die aber hier nicht näher behandelt werden soll.[36)]

4. Vergleich der Joint-Ordering- und der separaten Bestellpolitik in einem weiteren, einfachen stochastischen Lagerhaltungsmodell.[37)]

Das Modell ist dem von Abschnitt 2 dieses Teils ähnlich. Wir haben wieder ein Lager mit n Gütern. Anstatt eines bekannten Variationskoeffizienten $v = \sigma_i/\bar{r}_i$ nehmen wir hier eine etwas andere Beziehung für das Verhältnis zwischen maximaler Nachfragerate $r_{i,max}(t)$ und der durchschnittlichen Nachfragerate $\bar{r}_i(t)$ an. Es gelte:

$$\frac{r_{i,max}(t)}{\bar{r}_i(t)} = 1 + \frac{\rho_i}{t} \qquad (192)$$

ρ_i sei eine bekannte Kostante der Dimension [Zeit] für ein Gut i. Die Bestellkosten seien wiederum davon unabhängig, ob ein oder mehrere Güter gleichzeitig bestellt werden. Die Lieferzeit bleibt ebenfalls unberücksichtigt. Fehlmengen sollen nicht erlaubt sein.

35) Vgl.E.Naddor, "Some Models of Inventory...,a.a.O., S.3o9-312.
36) Vgl.E.Naddor, Inventory Systems,...a.a.O.,S.321-326.
37) Vgl. E.Naddor, Inventory Systems,..a.a.O.,S.32o-321.

Betrachten wir zunächst wieder die (s_i,q_i)-, d.h. die separate Bestellpolitik. Da die Lieferzeit Null ist, gilt

$$s_{oi} = 0 \tag{193}$$

für den optimalen Meldebestand. Jedes Mal, wenn der Lagerbestand eines Gutes auf Null gefallen ist, werden q_i Mengeneinheiten bestellt. Die Beziehung für die Gesamtlagerkostenfunktion lautet für diese Politik dann einfach

$$K_I = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{k_{li} q_i}{2} + \frac{k_b \bar{r}_i}{q_i} \right) \tag{194}$$

und für die minimalen Gesamtlagerkosten ergibt sich:

$$K_{oI} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2 k_b k_{li} \bar{r}_i} = \sqrt{2 k_b} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{k_{li} \bar{r}_i} \tag{195}$$

Bei der (t,S_i)-, d.h. der Joint-Ordering-Politik, werden alle t Zeiteinheiten Bestellungen aufgegeben. Dabei werden die Lagerbestände der Güter auf das jeweilige Lagerniveau S_i wiederaufgefüllt. Die S_i müssen jetzt aber so gewählt werden, daß keine Fehlmengen auftreten. Aufgrund von (192) erhalten wir daher

$$S_{oi} = \left(1 + \frac{\rho_i}{t}\right) \bar{r}_i t \tag{196}$$

Die Beziehung für die Gesamtlagerkostenfunktion bei Joint-Ordering-Politik lautet nun:

$$K^J = \sum_{i=1}^{n} k_{li} \left(S_{oi} - \frac{\bar{r}_i t}{2}\right) + \frac{k_b}{t} \tag{197a}$$

oder wegen (196)

$$K^J = \sum_{i=1}^{n} k_{li} \left(\frac{\bar{r}_i t}{2} + \bar{r}_i \rho_i \right) + \frac{k_b}{t} \tag{197b}$$

Die Lösung dieses Optimierungsproblems ergibt

$$t_o^J = \sqrt{\frac{2k_b}{\sum_{i=1}^{n} k_{1i}\bar{r}_i}} \qquad (198)$$

und dies in (197) eingesetzt führt zu

$$k_o^J = \sqrt{2k_b \sum_{i=1}^{n} k_{1i}\bar{r}_i} + \sum_{i=1}^{n} k_{1i}\bar{r}_i\rho_i \qquad (199)$$

Vergleichen wir jetzt beide Strategien miteinander, so sieht man, daß kein eindeutiges Urteil gefällt werden kann, welche der beiden Strategien vorzuziehen ist. Erst für konkrete Werte von $\bar{r}_i$, k_{1i}, k_b und ρ_i läßt sich eine Entscheidung zugunsten der einen oder der anderen Strategie fällen.

5. Joint-Ordering-Politik, angewandt auf ein stochastisches Lagerhaltungsmodell mit Poissonverteilung der Nachfrage.[38]

Betrachten wir eine Situation, in der zwei Güter gelagert werden. Für die beiden Güter möge gelten:

$$k_{11} = k_{12} = k_1$$
$$k_{b1} = k_{b2} = k_b$$

Werden beide Güter bei der Joint-Ordering-Politik zusammen bestellt, dann möge für die Beschaffungskosten gelten:

$$k_b^J = \alpha k_b , \qquad 1 \leq \alpha \leq 2 \qquad (200)$$

d.h. die Beschaffungskosten pro Bestellung sind bei der Joint-Ordering-Politik höchstens so hoch wie bei der separaten Bestellung beider Güter und mindestens

38) Abgesehen von der geänderten Symbolik im wesentlichen eine Wiedergabe von Edward A.Silver, "Some Characteristics of a Special Joint-Order Inventory Model", in: Operations Research, Bd. 13, 1965, S. 319-322.

so hoch wie bei der separaten Bestellung eines Gutes. Die Untergrenze entspricht der Annahme von Teil II dieser Arbeit.

Auch bezüglich der Nachfrage seien beide Güter identisch. Immer wenn ein Gut nachgefragt wird, soll nur jeweils eine Einheit verlangt werden. Die Nachfrage sei für beide Güter eine diskrete Zufallsvariable R, R = 0,1,2,... Eine interessante Verteilung, die für alle nichtnegativen R definiert ist, ist die Poissonverteilung.[39)]

Für die Wahrscheinlichkeit, daß R gerade gleich x ist, gilt, wenn R poissonverteilt ist mit dem Mittelwert μ

$$p(R = x;\mu) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \quad , x = 0,1,2,.... \qquad (201)$$

Wir nehmen nun weiter an, die Nachfrage nach beiden Gütern sei poissonverteilt mit $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ und die Lieferzeit spiele auch in diesem Modell keine Rolle.

Folgende Strategien sollen für dieses Modell verglichen werden:

1. Jedes Gut wird unabhängig von dem anderen bestellt, sobald sein Lagerbestand auf Null gesunken ist. Dabei wird das Lager auf ein Niveau $S_1 = S_2 = S$ wiederaufgefüllt.

2. Beide Güter werden zusammen bestellt, sobald der Lagerbestand eines der Güter auf Null gesunken ist. Auch hier gilt $S_1 = S_2 = S$.

Es werden die minimalen erwarteten (d.h. die langfristig zu erwartenden) Gesamtlagerkosten pro Zeiteinheit für beide Strategien bestimmt und miteinander verglichen.

Zunächst betrachten wir das Modell bei separater Bestellpolitik. Beide Güter werden unabhängig voneinader bestellt. Ist das Lagerniveau eines Gutes auf Null gesunken, werden S Mengeneinheiten des Gutes bestellt, die

---

39) Zur Poissonverteilung vgl. u.a. Frank A.Haight, Handbook of the Poisson Distribution, New York 1967; G. Hadley und T.M.Whitin, Analysis of Inventory Systems, ...a.a.O., S.136-140; L.Takács, Stochastische Prozesse. Aufgaben und Lösungen, München-Wien 1966, S.36-39 und S. 91 ff.

dann annahmegemäß sofort zur Verfügung stehen.

Die Poissonverteilung besitzt folgende Eigenschaften, die wir uns zunutze machen:

Der Erwartungswert der Nachfrage R in einer bestimmten Zeitperiode t ist

$$E(R_t) = \mu t, \qquad t = 0,1,2,... \tag{202}$$

Das bedeutet, daß μ die durchschnittliche Anzahl des Gutes ist, die während einer Zeiteinheit nachgefragt wird.

$$P\left\{\lim_{t\to\infty} \frac{R_t}{t} = \mu\right\} = 1 \tag{203}$$

μ kann somit auch als die Wahrscheinlichkeitsdichte des Auftretens der Nachfrage betrachtet werden.

Bei einem Lagerbestand S zu Beginn des Prozesses ergibt sich daher als erwartete Bestellhäufigkeit μ/S. Da durchschnittlich alle μ Zeiteinheiten eine Einheit des Gutes nachgefragt wird, hat die Lagerabgangskurve einen treppenförmigen Verlauf. Der durchschnittliche Lagerbestand ist daher nicht mehr wie im kontinuierlichen Fall S/2, sondern (S+1)/2.

Als langfristig zu erwartende durchschnittliche Gesamtlagerkosten pro Zeiteinheit für ein Gut ergeben sich daher bei der separaten Bestellpolitik

$$K = \frac{1}{2} k_1(S + 1) + \frac{\mu k_b}{S} \tag{204}$$

und für beide Güter zusammen gilt:

$$K_{1+2} = k_1(S + 1) + \frac{2\mu k_b}{S} \tag{205}$$

Hieraus erhalten wir

$$S_{o,1+2} = \sqrt{\frac{2\mu k_b}{k_1}} \tag{206}$$

Ist $S_{o,1+2}$ nicht ganzzahlig, so ist eine der beiden $S_{o,1+2}$ benachbarten ganzen Zahlen das optimale S.

Betrachten wir jetzt das Modell bei Joint-Ordering-Politik. Sobald das Lagerniveau eines der beiden Güter auf Null gesunken ist, wird gemeinsam von beiden Gütern je S EInheiten bestellt, die, da die Lieferzeit Null ist, auch sofort zur Verfügung stehen. Bezeichnen wir jetzt mit s eine Zufallsvariable, die die Höhe des Lagerniveaus jenes Gutes zu dem Zeitpunkt angibt, an dem die Höhe des Lagerniveaus des anderen Gutes auf Null gesunken ist. s ist also der überschüssige Lagerbestand bei der Joint-Ordering-Politik. Gesucht sind nun die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß s einen bestimmten positiven Wert j = 1, 2,...,S annimmt.[40]

Aufgrund kombinatorischer Überlegungen erhält man

$$p(s=j) = \binom{2S-j-1}{S-1} 2^{-(2S-j-1)} \quad , j = 1,2,...,3 \quad (207)$$

und der erwartete überschüssige Lagerbestand beträgt

$$E(s) = S \binom{2\,S}{S} 2^{-(2S\,-\,1)} \quad (208)$$

Diese Beziehung kann für große Werte von S durch die Normalverteilung approximiert werden[41] und man erhält

$$E(s) = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad (209)$$

Bezeichnen wir jetzt mit t' eine Zufallsvariable, die das Bestellintervall darstellt, so erhält man aufgrund ähnlicher Überlegungen wie oben folgende Beziehung für das erwartete Bestellintervall

$$E(t') = \frac{S}{\mu}\left[1 - \binom{2S}{S} 2^{-2S}\right] \quad (210)$$

Diese Beziehung läßt sich für großes S wiederum approximieren zu

$$E(t') = \frac{S}{\mu}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi S}}\right) \quad (211)$$

---

40) Vgl.A.Rényi, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1962, S.31-35.

41) Vgl. A.Rényi, Wahrscheinlihckeitsrechnung,...a.a.O.,

Unter Berücksichtigung von (200), (208) und (210) erhält man für die langfristig zu erwartenden durchschnittlichen Gesamtlagerkosten pro Zeiteinheit bei der Joint-Ordering-Politik folgende Beziehung

$$K^J = k_1 S\left[1 + \binom{2S}{S} 2^{-2S}\right] + \frac{\mu\alpha k_b}{S} \Big/ \left[1 - \binom{2S}{S} 2^{-2S}\right] \quad (212)$$

Für großes S gilt aber: [42)]

$$1 + \binom{2S}{S} 2^{-2S} \approx \frac{1}{1 - \binom{2S}{S} 2^{-2S}} \quad (213)$$

Wir können für (212) also schreiben:

$$K^J \approx \left[k_1 S + \frac{\mu\alpha k_b}{S}\right] \Big/ \left[1 - \binom{2S}{S} 2^{-2S}\right] \quad (214)$$

oder nach (200), (209) und (211) über die Approximation durch die Normalverteilung

$$K^J \approx \left[k_1 S + \frac{\mu\alpha k_b}{S}\right] \Big/ \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi S}}\right] \quad (215)$$

Für gegebene Werte von α, μ, k_1 und k_b läßt sich das optimale ganzzahlige S bestimmen.

Um die beiden Strategien zu vergleichen, normieren wir die Kosten pro Zeiteinheit, indem wir (205) und (214) durch k_1 dividieren. Man erhält:

$$\frac{K_{1+2}}{k_1} = (2\mu k_b / k_1 S) + S + 1 \quad (216)$$

$$\frac{K^J}{k_1} = S + (\mu\alpha k_b / k_1 S) \Big/ \left[1 - \binom{2S}{S} 2^{-2S}\right] \quad (217)$$

Silver hat nun für eine große Anzahl von Werten für $\mu k_b / k_1$ und α die Kosten berechnet, die bei beiden Strategien entstehen. Für den Fall, daß $\alpha = 1$, d.h. $k_b^J = k_b$,

42) Silver führt diesen Zwischenschritt explizit nicht aus, sondern schreibt direkt die Beziehung (214).

war die Joint-Ordering-Politik stets vorteilhaft.[43] Er zeigt weiterhin, daß bei gegebenen $\mu k_b/k_1$-Werten kritische Werte α_k für α errechnet werden können. Ist $\alpha < \alpha_k$, so wird die Joint-Ordering-Politik vorgezogen. Für $\alpha > \alpha_k$ ist die separate Bestellpolitik vorteilhaft.[44]

Eine Verallgemeinerung der Joint-Ordering-Strategie von Silver findet man bei Balintfy.[45]

Dieser betrachtet ein Lager mit n Gütern. Sobald für ein Gut i der Lagerbestand auf den Meldebestand s_i gesunken ist, erfolgt eine Sammelbestellung. Im Gegensatz zu Silver werden aber nicht alle Güter mitbestellt. Balintfy bestimmt vielmehr für alle Güter einen sog. "can-order"-Bestand $s' > s$. Nur die Güter, deren Lagerbestand sich zum Zeitpunkt einer Sammelbestellung im "can-order" - Bereich befindet, werden mitbestellt. Für eine negativ exponentiell verteilte Nachfrage wird die Lösung des Systems abgeleitet.

Der Autor weist weiter darauf hin, daß, wenn man die Annahme einer negativen Exponentialverteilung fallen läßt, das Problem bislang analytisch noch nicht gelöst worden ist. Wegen der geringen Sensibilität dieser Systeme könnten seine Ableitungen aber als Approximationen benutzt werden. Ein anderer Weg zur Lösung des Problems ist der Gebrauch von Simulationstechniken.

---

43) Vgl. E.A.Silver, "Some Characteristics...",a.a.O., S. 320, Figur 1.
44) Vgl. E.A.Silver, "Some Characteristics...",a.a.O., S. 321, Figur 2.
45) Vgl. J.L.Balintfy, "On a Basic Class of Multi-Item Inventory Problems", ... a.a.O., S. 292-297.

S C H L U S S B E M E R K U N G E N

Die Zielsetzung dieser Arbeit war sehr begrenzt. Nachdem in Teil I die wichtigsten Begriffe kurz erläutert wurden, die zur Charakterisierung der verschiedenen Lagerhaltungsmodelle notwendig sind, wurde in Teil II und Teil III die Joint-Ordering-Politik auf deterministische Lagerhaltungsmodelle angewandt. Dabei waren in Teil II die Beschaffungskosten unabhängig von der Zahl verschiedener Güter, die zu einer Sammelbestellung zusammengefaßt wurden, während in Teil III nur ein Teil der Beschaffungskosten bestellfix war, der andere Teil hingegen abhängig von der Zahl der Güter in der Sammelbestellung. Die Analyse in Teil II ging dabei von dem elementarsten Lagerhaltungsmodell aus und wurde auf andere einfache Lagerhaltungsmodelle ausgeweitet; auf ein Fehlmengenmodell, ein Rabattmodell und ein Modell mit Lagerkapazitätsrestriktion.

In Teil III bestanden die Beschaffungskosten aus einer fixen und einer variablen Komponente. Die Vorteilhaftigkeit der Joint-Ordering-Politik wurde für drei Spezialfälle untersucht, die wieder auf dem klassischen Bestellmengenmodell aufbauten. Unter den Annahmen von Spezialfall 2 wurde weiterhin untersucht, ob die Gesamtlagerkosten nicht noch mehr gesenkt werden können, wenn ein bestimmtes Gut oder eine bestimmte Gütergruppe aus der Joint-Ordering-Strategie ausgeklammert und gesondert betrachtet wird.

In Teil IV wurde die unrealistische Annahme einer deterministischen Nachfrage durch Annahme gewisser stochastischer Eigenschaften der Nachfrage ersetzt. Um die Analyse nicht zu sehr zu komplizieren, waren die Annahmen über die Verteilung der Nachfrage (konstanter Variationskoeffizient für alle Güter, Poisson-Verteilung) weiterhin ziemlich einschränkend.

Diese Arbeit hatte auch nicht zum Ziel, gebrauchsfertige Rezepte für die Anwendung der Joint-Ordering-Politik zu liefern. Vielmehr sollte lediglich das Prinzip anhand der theoretisch wichtigsten Lagerhaltungsmodelle eingehend erläutert und seine Vorteilhaftigkeit untersucht werden. Ähnlich wie bei allen anderen Lagerhaltungsmodellen treten bei der praktischen Anwendung der Joint-Ordering-Politik weitere Probleme auf, die in den Modellen aus Gründen der Vereinfachung explizit nicht berücksichtigt werden können, z.B. Fragen, wie die einzelnen Kosten eigentlich bestimmt und wie die Nachfrageraten geschätzt werden; Fragen, welche Systemkosten bei den verschiedenen Bestellstrategien entstehen usw. Auf die Probleme bei der praktischen Anwendung von mathematischen Lagerhaltungsmodellen kann hier jedoch nicht eingegangen werden. Diese Aufgabe erübrigt sich auch, da schon an anderer Stelle diese Probleme eingehend behandelt wurden.[46)]

---

46) Vgl. u.a. M.K.Starr und D.W.Miller, Inventory Control, ... a.a.O., Part II: Implementation Phase: the theory of practice, S. 17o-329; G.Hadley und T.M.Whitin, Analy sis of Inventory Systems, ...a.a.O. Kap. 9, Problems of Practical Application, S. 4oo-431; einen kurzen Überblick über die entstehenden Schwierigkeiten findet man bei H.-J.Schrader, Die Theorie der Vorratsplanung, ... a.a.O., S. 32-39 und S. 165-185.

LITERATURVERZEICHNIS

Andler, Kurt	Rationalisierung der Fabrikation und optimale Losgröße, München 1929.
Arrow, K.J. Harris, T. Marschak, J.	Optimal Inventory Policy, in: Econometrica, Bd. 19, 1951, S.25o-272.
Arrow, K.J. Karlin, S. Scarf, H.	Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford 1958.
Balintfy, J.L.	On a Basic Class of Multi-Item Problems, in: Management Science, Bd.1o, 1964, S.287-297.
Boylan, E.S.	Multiple (s,S) Policies, in: Econometrica, Bd. 32, 1964, S.399-4o9.
Battersby, A.	A Guide to Stock Control, London 1962.
Bellman, R.	On the Theory of Dynamic Programming - A Warehousing Problem, in: Management Science, Bd. 2, 1956, S.272-275.
Bowman, E.H. Fetter, R.B.	Analysis for Production Mangement, Homewood (Ill.) 1961.
Brown, R.D.	Estimating Aggregate Inventory Standards, in: Naval Research Logistics Quarterly, Bd. 1o, 1963, S.55-72.
Brown, R.G.	Statistical Forecasting for Inventory Control, New-Toronto-London 1959.
Buchan, J. Koenigsberg, E.	Scientific Inventory Management, Englewood Cliffs, N.J., 1963.
Carr, C.R. Howe, C.W.	Quantitative Decision Procedures in Management and Economics. Deterministic Theory and Application, New York-Toronto-London 1964.
Churchman, C.W. Ackoff, R.L. Arnoff, E.L.	Introduction to Operations Research, New York 1957. Deutsche Übersetzung: Operations Research - Eine Einführung in die Unternehmensforschung, Wien-München 1961.
Dinkelbach, W.	Zum Problem der Losgröße und des Sortenwechsels bei der Produktionsplanung, Köln 1963.
Dreyfus, S.E.	An Analytic Solution of the Warehouse Problem, in: Management Science, Bd.4, 1958, S.99-1o4.

Dvoretzky, A.
Kiefer, J.
Wolfowitz, J.
: The Inventory Problem, in: Econometrica, Bd. 2o, 195o, S.187-222 und S.45o-466.

Dvoretzky, A.
Kiefer, J.
Wolfowitz, J.
: On the Optimal Character of the (s,S)-Policy in Inventory Theory, in: Econometrica, Bd. 21, 1953, S.586-596.

Eilon, S.
: A Note on the Optimal Range, in: Management Science, Bd. 7, 196o, S.56-61.

Fabrycky, W.J.
Banks, J.
: Procurement and Inventory Systems: Theory and Analysis, New York-Amsterdam-London 1967, bes.Kap.7, S.169-19o.

Fetter, R.B.
Dalleck, W.C.
: Decision Models for Inventory Management, Homewood (Ill.) 1961.

Gebhardt-Seele, P.
: Rechenmodelle für wirtschaftliches Lagern und Einkaufen, München 1962.

Geisler, M.A.
: A Study of Inventory Policy, in: Management Science, Bd.9, 1963, S.49o-497.

Gluss, B.
: Costs of Incorrect Data in Optimal Inventory Computations, in: Management Science, Bd.6, 196o, S.491-497.

Gourary, M.
Lewis, R.
Neeland, F.
: An Inventory Control Bibliography, in: Naval Research Logistics Quarterly, BD.3, 1956, S.297-3o4.

Gutenberg, E.
: Sortenproblem und Losgröße, in: Handwörterbuch der Betriebswirtschaft, 3. Aufl., Stuttgart 196o, 3.Bd., Spalte 4897-49o6.

Hadley, G.
Whitin, T.M.
: Analysis of Inventory Systems, Englewood Cliffs, N.J., 1963.

Haight, F.A.
: Handbook of the Poisson Distribution, New York-London-Sidney 1967.

Hanssmann, F.
: Operations Research in Production and Inventory Control, New York-London 1962.

Hanssmann, F.
: A Survey of Inventory Theory from the Operations Research Viewpoint, in: Progress in Operations Research, Bd.1, hrsg. von R.L.Ackoff, New York-London 1961, S.66-1o4.

Holt, C.C.
Modigliani, F.
Muth, J.F.
Simon, H.A.
: Planning Production, Inventories, and Work Force, Englewood Cliffs, N.J., 196o.

Holt, C.C.
Simon, H.A.
: The Control of Inventory and Production Rates - A Survey, in: Operations Research, Bd.5, 1954, S.289-3o1.

Laderman, J. Littauer, S.B. Weiss, L.	The Inventory Problem, in: Journal of the American Statistical Association, Bd. 48, 1953, S.717-732.
Levy, J.	Loss Resulting from the Use of Incorrect Data in Computing an Optimal Inventory Policy, in: Naval Research Logistics Quarterly, Bd.5, 1958, S.75-82.
Levy, J.	Further Notes on the Loss Resulting from the Use of Incorrect Data in Computing an Optimal Inventory Policy, in:Naval Research Logistics Quarterly, Bd.6, 1959, S.25-32.
Magee, J.F.	Production Planning and Inventory Control, New York 1958.
Manne, A.S.	Programming of Economic Lot Sizes, in: Management Science, Bd.4, 1958,S.115-135.
Marx, W.	Absatzmengen- und Losgrößenbestimmungen im Sortenbetrieb, Meisenheim am Glan 1966.
Morse, P.M.	Queues, Inventories and Maintenance, New York 1958.
Müller-Merbach, H.	Die Bestimmung optimaler Losgrößen bei Mehrproduktfertigung, Darmstadt 1962.
Müller-Merbach, H.	Sensibilitätsanalyse der Losgrößenbestimmung, in: Unternehmensforschung, Bd. 6, 1962, S. 79-88.
Naddor, E.	Elements of Inventory Systems, in: Operations Research and Systems Engineering hrsg. von C.D.Flagle, H.Huggins, R.H. Roy, Baltimore 1960, S. 311-364.
Naddor, E.	Evaluations of Inventory Control, in: Proceedings of the Second International Conference on Operational Research (Aix-en-Provence 1960), hrsg. von J.Banbury und J.Maitland, London-Paris 1961.
Naddor, E.	Inventory Systems, New York-London-Sidney 1966.
Naddor, E.	On the Equivalence of Some Inventory Systems, in: Management Science, Bd.9, 1963, S.482-489.
Naddor, E.	Some Models of Inventory and an Application, in: Management Science, Bd. 2, 1956, S.299-312.
Naddor, E. Saltzman, S.	Optimal Reorder Periods for an Inventory System with Variable Costs of Ordering, in: Operations Research, Bd.6, 1958, S.676-685.

Ostrowski, A.	Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. III, Integralrechnung auf dem Gebiet mehrerer Variablen, Basel und Stuttgart 1962.
Pack, L.	Optimale Bestellmenge und optimale Losgröße, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft 1963, S. 465-492 und S.573-594.
Raymond, F.E.	Quantity and Economy in Manufacturing, New York 1931.
Rényi, A.	Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1962.
Sasieni, M. Yaspan, A. Friedman, L.	Operations Research Methods and Problems, New York-London 1959. Deutsche Übersetzung: Methoden und Probleme der Unternehmensforschung. Operations Research, Würzburg 1962.
Schlüter, H.	Untersuchungen zum Problem der optimalen Losgröße, Diss. Frankfurt 1958.
Schrader, H.-J.	Die Theorie der Vorratsplanung. Unter besonderer Berücksichtigung unsicherer Erwartungen, Diss. Bonn 1963.
Silver, E.A.	Some Characteristics of a Special Joint-Order Inventory Model, in: Operations Research, Bd.13, 1965, S. 319-322.
Solomon, M.J.	The Use of an Economic Lot Range in Scheduling Period, in: Management Science, Bd. 5, 1959, S.434-442.
Starr, M.K. Miller, D.W.	Inventory Control: Theory and Practice, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
Strobel, W.	Simultane Losgrößenbestimmung bei stationären Modellen, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft 1964, S. 241 ff.
Takács, L.	Stochastic Processes Processes Problems and Solutions, London-New York 1962. Deutsche Übersetzung: Stochastische Prozesse. AUfgaben und Lösungen, München-Wien 1966.
Vaszonyi, A.	Scientific Programming in Business and Industrie, New York 1958. Deutsche Übersetzung: Die Planungsrechnung in Wirtschaft und Industrie, Wien-München 1962.
Wagner, H.M.	Statistical Management of Inventory Systems, New York-London 1962.
Whitin, T.M.	Inventory Control Research: A Survey: in: Management Science, Bd. 1, 1954, S. 32-4o.

Whitin, T.M. The Theory of Inventory Management, 2. Aufl., Princeton 1957.

Winkler, D. Die kurzfristige Abstimmung zwischen Produktion und Lagerung unter besonderer Berücksichtigung des Lagerbereichs - Probleme und Lösungsverfahren -, Diss. Saarbrücken 1964.

ROTAPRINT-OFFSETDRUCKEREI

Klein

6602 Dudweiler · Scheidter Straße 26
Telefon Sulzbach 7 32 84
Drucksachen aller Art · Fotokopien
Spezialgebiet: Druck v. Dissertationen

Beanstandungen der Druckqualität, ist auf schlecht geschriebene Text-Vorlagen zurückzuführen.
R.O.D. Klein.